

Capítulo 7

CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

DEFINICIÓN

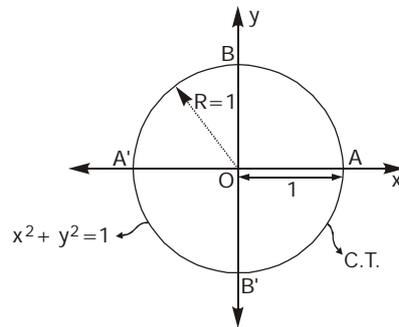
Es aquella circunferencia canónica; es decir, con centro en el origen del sistema cartesiano; y con radio igual a la unidad del sistema. En el gráfico adjunto, destacaremos los siguientes elementos:

A (1; 0) : origen de arcos

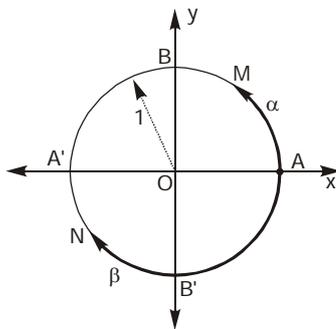
B (0; 1) : origen de complementos de arcos

A' (-1; 0) : origen de suplementos de arcos

B' (0; -1) : anónimo



El punto A(1;0) se denomina origen de arcos, ya que a partir de él se van a dibujar **arcos orientados**, con un signo asociado, tan igual que en el caso de los ángulos trigonométricos; por ejemplo, en el gráfico:

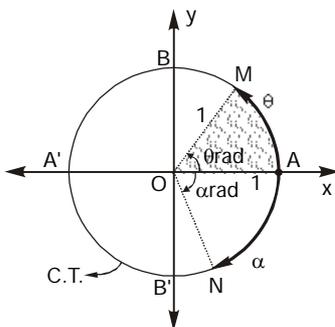


α : es un arco positivo
(sentido antihorario)

β : es un arco negativo
(sentido horario)

Ahora bien, los puntos "M" y "N" se denominan **extremos de arco**; y dichos arcos se denominarán **arcos en posición normal**.

Si observamos en la siguiente C.T., notaremos que entre el arco y el ángulo central correspondiente, se cumple que numéricamente son iguales; lo cual permitirá establecer una relación entre los números reales y el ángulo central correspondiente, en radianes.



En el sector circular AOM; por longitud de un arco:

$\widehat{AOM} = \theta \text{ rad}$, esto es:

$\widehat{AOM} \text{ (en rad)} = \widehat{AM} \text{ (numéricamente)}$

Debido a esta relación, a cada arco le corresponde un ángulo central del mismo valor, pero expresado en radianes.

Así mismo, podemos establecer: $R.T. (\theta \text{ rad}) = R.T. (\theta)$; $\theta \in \mathbb{R}$

Con lo cual queda claro que las Razones Trigonómicas (R.T.) de un número real, son calculables al asociarles un ángulo cuya medida está expresada en radianes, numéricamente igual considerado.

Es decir; por ejemplo:

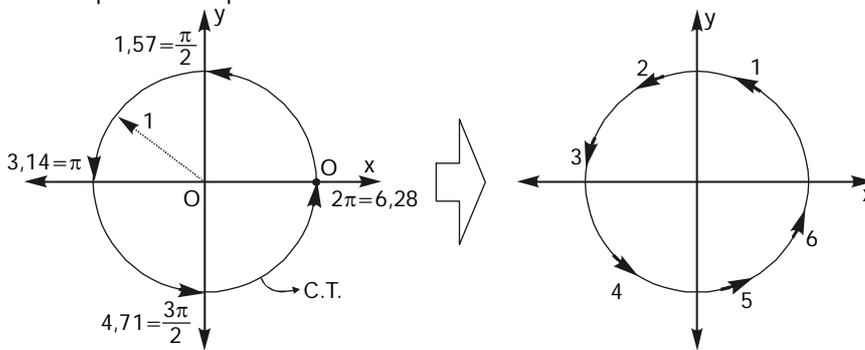
$$\begin{aligned} \text{Sen } 2 &= \text{Sen } 2 \text{ rad} \\ \text{Tan } 3 &= \text{Tan } 3 \text{ rad} \\ \text{Cos } (-1) &= \text{Cos } (-1 \text{ rad}) \end{aligned}$$

LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS

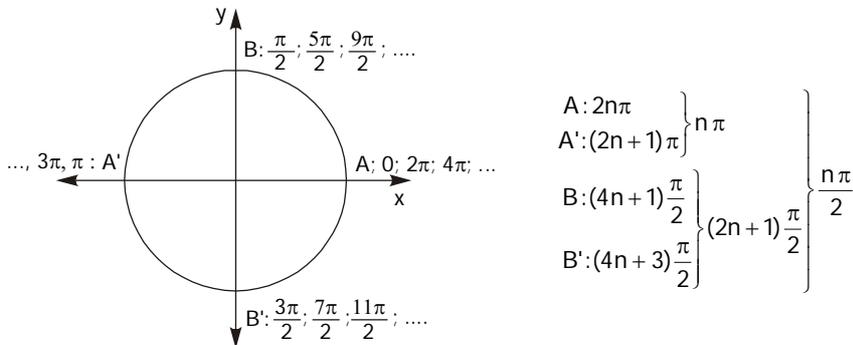
Son segmentos dirigidos (de medida positiva o negativa) que van a representar el valor numérico de una Razón Trigonómica de un cierto número (expresado graficamente como un arco); así como también permitirán analizar las variaciones de estas R.T., así como su comportamiento.

Para comenzar con el análisis, se recomienda tener en cuenta las siguientes observaciones para la ubicación de arcos.

a) Para arcos representados por números enteros:

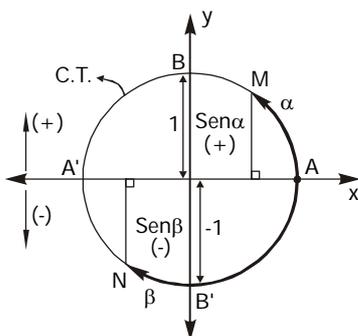


b) Para arcos con extremos en A, B, A' ó B' (n ∈ Z)



I. **Línea Seno.-**

Representación:



Variación :

α	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
Sen α	$0 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$

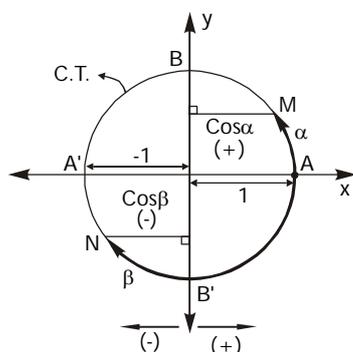
Esto es:

$$-1 \leq \text{Sen } \alpha \leq 1 ; \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{Sen } \alpha \begin{cases} \text{máximo: } 1 \\ \text{mínimo: } -1 \end{cases}$$

II. Línea Coseno-

Representación:



Variación :

α	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
$\text{Cos } \alpha$	$1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 1$

Esto es:

$$\boxed{-1 \leq \text{Cos } \alpha \leq 1} ; \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{Cos } \alpha \begin{cases} \text{máximo: } 1 \\ \text{mínimo: } -1 \end{cases}$$

Observación:

Si consideramos el extremo de un arco cualquiera, notaremos que por ser un punto del plano cartesiano, tiene sus propias componentes:

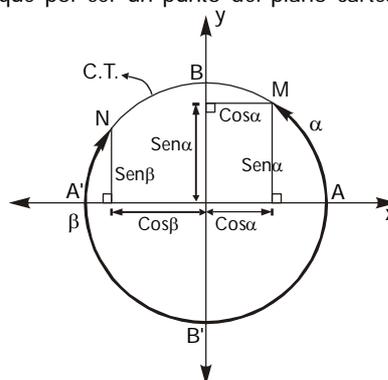
Por ejemplo, para "M" se nota que:

abscisa = $\text{Cos } \alpha$

ordenada = $\text{Sen } \alpha$

Luego:

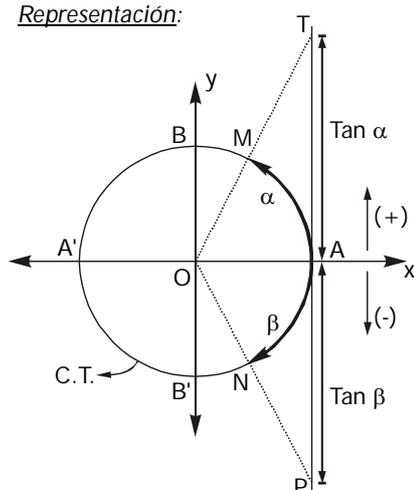
$$\boxed{M = (\text{Cos } \alpha ; \text{Sen } \alpha)}$$



De manera similar, las componentes de N son $(\text{Cos } \beta ; \text{Sen } \beta)$

III. Línea Tangente-

Representación:



Variación :

α	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
$\text{Tan } \alpha$	$0 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 0$

Esto es:

$$\boxed{-\infty < \text{Tan } \alpha < +\infty}$$

No hay máximo, ni mínimo

Consideración:

La L.T. tangente no está definida para arcos cuyo extremo esté en B ó B'; lo cual significa que la R.T. tangente no se define para

todo arco de la forma: $(2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Poner el signo en:

- I. $\text{Cos}80^\circ$ () $\text{Cos} 100^\circ$
 - II. $\text{Cos}200^\circ$ () $\text{Cos} 300^\circ$
 - III. $\text{Cos}x$ () $\text{Cos}(x+20^\circ)$
- x ; agudo

- a) < ; < ; > b) > ; > ; <
- c) > ; < ; > d) > ; < ; =
- e) < ; > ; <

02. Poner el signo > ; < o = en:

- I. $\text{Sen}20^\circ$ () $\text{Sen}80^\circ$
- II. $\text{Cos}10^\circ$ () $\text{Cos}40^\circ$
- III. $\text{Sen}200^\circ$ () $\text{Sen}300^\circ$

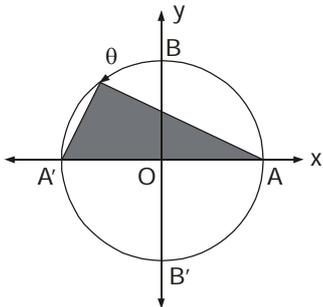
- a) > ; > ; < b) < ; < ; <
- c) > ; > ; > d) < ; > ; >
- e) > ; < ; <

03. Indicar con "V" lo verdadero y con "F" lo falso:

- I. $\text{Tg}50^\circ > \text{Tg}200^\circ$
- II. $\text{Tg}100^\circ > \text{Tg}300^\circ$
- III. $\text{Tg}135^\circ = \text{Tg}315^\circ$

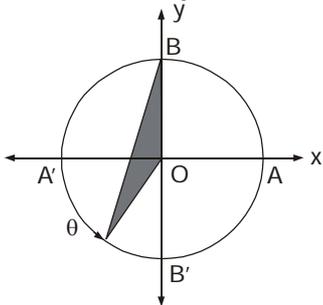
- a) VVV b) VFV c) FFV
- d) FVF e) FFF

04. Determine el área de la región sombreada en la C.T.



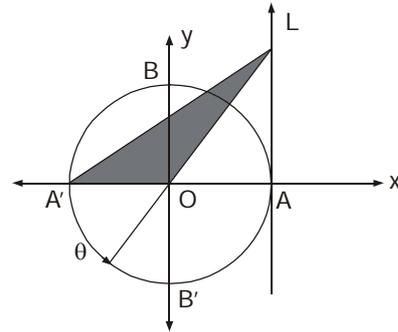
- a) $\text{Sen} \theta$ b) $-\text{Cos} \theta$ c) $\text{Sen} \theta / 2$
- d) $-\text{Cos} \theta$ e) $-\text{Cos} \theta / 2$

05. Determine el área de la región sombreada en la C.T.



- a) $-\frac{\text{Sen}\theta}{2}$ b) $-\frac{\text{Cos}\theta}{2}$ c) $\frac{\text{Cos}\theta}{2}$
- d) $\frac{\text{Sen}\theta}{2}$ e) $-\frac{\text{Sen}\theta \cdot \text{Cos}\theta}{2}$

06. Determine el área de la región sombreada en la C.T.



- a) $\text{Tg} \theta$ b) $\frac{\text{Tg}\theta}{2}$ c) $-\text{Tg} \theta$
- d) $-\frac{\text{Tg}\theta}{2}$ e) $-\text{Tg}^2 \theta$

07. Determine la variación de: $E = 4 \text{Sen} \theta - 1$

- a) $[-3;3]$ b) $[-4;4]$ c) $[3;5]$
- d) $[-5;3]$ e) $[2;5]$

08. Determine la variación de: $A = 2 \text{Cos}^2 \theta + 3$

- a) $[3;5]$ b) $[1;5]$ c) $[-3;5]$
- d) $[-1;3]$ e) $[-3;3]$

09. Sabiendo que $\alpha \in \text{IIC}$.

¿Cuál es la variación de:

$$L = 3 \text{Sen} \alpha - 1?$$

- a) $\langle 0 ; 2 \rangle$ b) $\langle -1 ; 2 \rangle$ c) $\langle 0 ; 3 \rangle$
- d) $\langle -1 ; 1 \rangle$ e) $[-4 ; 2]$

10. Sabiendo que $\beta \in \text{IIIC}$; sabiendo la variación de:

$$L = 2 \text{Cos} \beta + 1$$

- a) $[-1 ; 3]$ b) $\langle -1 ; 3 \rangle$ c) $\langle -1 ; 1 \rangle$
- d) $\langle 0 ; 3 \rangle$ e) $\langle -2 ; 2 \rangle$

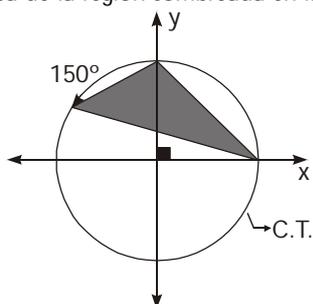
11. Calcular el producto del máximo y mínimo valor de:

$$f(\alpha, \beta, \theta) = 2 \text{Sen}^2 \alpha - 3 | \text{Cos} \beta | + \text{Sen} \theta$$

Siendo α , β y θ independientes entre sí.

- a) 0 b) 4 c) 8
- d) -8 e) -12

12. Hallar el área de la región sombreada en la C.T.



- a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}\right)\mu^2$ b) $\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\mu^2$
 c) $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\right)\mu^2$ d) $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\right)\mu^2$
 e) $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\right)\mu^2$

13. Sabiendo que: $x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$; señale la variación de:

$$L = 3\tan^2x + 1$$

- a) $\langle 0; 1 \rangle$ b) $[0; 1]$ c) $\langle 1; 4 \rangle$
 d) $[1; 4]$ e) $[2; 4]$

14. Sabiendo que: $\pi < x < 2\pi$
 ¿Cuál es la variación de:

$$L = 3\cos\frac{x}{2} - 1?$$

- a) $[-4; 2]$ b) $\langle -4; 2 \rangle$ c) $\langle -4; 1 \rangle$
 d) $\langle -4; -1 \rangle$ e) $[-4; 1]$

15. Siendo $x \in \left(\frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{24}\right)$

Señale la variación de:

$$L = \frac{4}{2\text{Sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1}$$

- a) $\langle 1; 2 \rangle$ b) $\langle 1; 4 \rangle$ c) $\langle 2; 4 \rangle$
 d) $\langle 3; 6 \rangle$ e) $\langle 4; 8 \rangle$

16. Sabiendo que $x \in \left[\frac{17\pi}{24}; \frac{7\pi}{8}\right]$

Señale la variación de:

$$L = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) + 3$$

- a) $[1; 3]$ b) $[-1; 3]$ c) $[1; 5]$
 d) $[-3; 3]$ e) $[3; 6]$

17. Señale Verdadero (V) o falso (F), según corresponda en:

I. Si: $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Tan}x_1 < \text{Tan}x_2$

II. Si: $\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \pi \Rightarrow \text{Tan}x_1 > \text{Tan}x_2$

III. Si: $\frac{3\pi}{2} < x_1 < x_2 < 2\pi \Rightarrow |\text{Tan}x_1| > |\text{Tan}x_2|$

- a) VVV b) VVF c) FFV
 d) VFV e) VFF

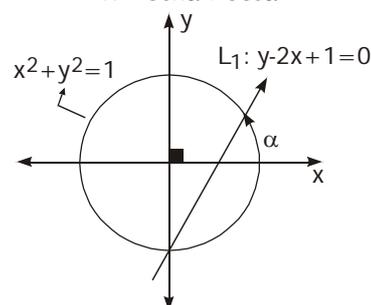
18. Hallar todos los valores que debe tomar "K" para que la igualdad no se verifique:

$$\text{Sec}\theta = \frac{2K - 3}{5}$$

- a) $K < -1 \vee K > 4$ b) $-1 \leq K \leq 4$
 c) $-1 < K < 4$ d) $K = -1 \vee K = 4$
 e) $K \leq -1 \vee K \geq 4$

19. En la C.T. calcular un valor de:

$$K = \text{Sen}\alpha + \text{Cos}\alpha$$



- a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{7}{5}$
 d) $\frac{1}{5}$ e) 1

20. Sabiendo que: $\frac{11}{12} \leq x \leq \frac{35}{12}$

Señale la variación de:

$$C = 4\cos\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + 1$$

- a) $[-3; 2]$ b) $[-3; 3]$ c) $[-2; 3]$
 d) $[-5; 6]$ e) $[-3; 5]$

21. Si: $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi; \pi \leq \theta \leq 2\pi$

Calcular la suma del máximo y mínimo valor de:

$$E = 2\text{Sen}\alpha - 3\text{Cos}\beta + 4\text{Sen}\theta$$

- a) 1 b) 2 c) 0
d) -1 e) -2

22. De las cuatro proposiciones, indicar dos que son imposibles:

- I. $\sqrt{3}\text{Sen}^2x = 2$
II. $(m^2 + n^2)\text{Cos}x = 2mn, m \wedge n \in \mathbb{R}$
III. $(m^2 + n^2)\text{Csc}x = m^2 - n^2; m > n > 0$
IV. $\text{Sec}x = \sqrt{3}$

- a) I y II b) I y III c) II y IV
d) II, III e) III, IV

23. Decir si son falsos (F) o verdaderos (V) los siguientes enunciados:

- I. La función Seno y Coseno son negativos en el tercer cuadrante y crecientes en el cuarto cuadrante.
II. No existe función trigonométrica alguna de un ángulo del segundo cuadrante que sea positivo y aumente a medida que el ángulo crece.
III. Sólo existe una función que puede tomar el valor de 3,8 y ser positiva en el tercer cuadrante.

- a) FFF b) VFF c) VFV
d) VVV e) VVF

24. Cuando el ángulo "x" aumenta de 90° a 180°. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

- a) El Seno aumenta.
b) El Coseno aumenta.
c) El Cosecante aumenta.
d) La Secante disminuye.
e) La Cotangente aumenta.

25. En un círculo trigonométrico se tiene:

$$\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \pi$$

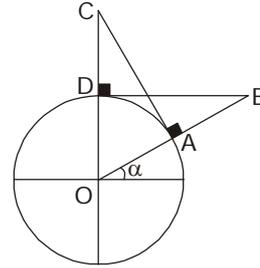
De las siguientes proposiciones:

- I. $\text{Sen}x_1 > \text{Sen}x_2$
II. $|\text{Cos}x_2| > |\text{Cos}x_1|$
III. $\text{Cos}x_2 < \text{Cos}x_1$

Es o son verdaderas:

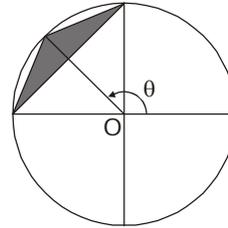
- a) Sólo I b) Sólo II
c) Sólo III d) Sólo I y II
e) Las 3 son correctas

26. En la circunferencia trigonométrica, se pide indicar el valor de $\overline{OC} + \overline{DB}$, en función del ángulo "α"



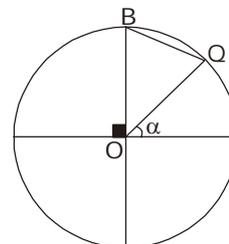
- a) $\text{Sec}\alpha + \text{Tan}\alpha$ b) $\text{Sec}\alpha - \text{Tan}\alpha$
c) $\frac{1 + \text{Cos}\alpha}{\text{Sen}\alpha}$ d) $\frac{1 - \text{Cos}\alpha}{\text{Sen}\alpha}$
e) $\text{Sec}\alpha + \text{Csc}\alpha$

27. En el círculo trigonométrico, calcular el área de la región sombreada.



- a) $\frac{1}{2}(\text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta - 1)$
b) $\frac{1}{2}(\text{Sen}\theta - \text{Cos}\theta - 1)$
c) $\frac{1}{2}(1 - \text{Sen}\theta\text{Cos}\theta)$
d) $\frac{1}{2}(1 - 2\text{Cos}\theta)$
e) $\frac{1}{2}(1 - 2\text{Sen}\theta)$

28. Calcular BQ en el círculo trigonométrico adjunto en función de "α"



- a) $\sqrt{1 - \text{Sen}\alpha}$ b) $\sqrt{1 + \text{Sen}\alpha}$
c) $\sqrt{2(1 - \text{Sen}\alpha)}$ d) $\sqrt{2(1 + \text{Sen}\alpha)}$
e) $\sqrt{2(1 + \text{Cos}\alpha)}$

29. Evaluar:

$$\text{Sen}(k\pi) + \text{Cos}(k\pi) + \text{Tan}(k\pi)$$

k: número entero no negativo.

- a) ± 1 b) 2 c) 1
 d) $(-1)^k$ e) - 1

30. Si α es un arco del segundo cuadrante, positivo menor que una vuelta.

Hallar la extensión de:

$$\text{Cos}(\alpha + \phi)$$

Si: $\frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$

- a) $-\frac{1}{2} < \text{Cos}(\alpha + \phi) < \frac{1}{2}$
 b) $-1 \leq \text{Cos}(\alpha + \phi) < -\frac{1}{2}$
 c) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \text{Cos}(\alpha + \phi) < -\frac{1}{2}$
 d) $-1 \leq \text{Cos}(\alpha + \phi) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 e) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \text{Cos}(\alpha + \phi) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

31. De las siguientes proposiciones:

I. Si: $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < 0$ entonces:

$$\text{Sen}|x_1| > \text{Sen}|x_2|$$

II. Si: $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < 0$ entonces:

$$|\text{Sen}x_2| > |\text{Sen}x_1|$$

III. $\frac{\text{Sen}x + \text{Tan}x}{\text{Cos}x + \text{Ctg}x}$

Es positivo en el primer y tercer cuadrante y negativo en el segundo y cuarto cuadrante.

Son verdaderas:

- a) Sólo I b) Sólo I y II c) Sólo II y III
 d) Sólo III e) I, II y III

32. El mínimo valor de la función:

$$f(x) = \text{Tg}^2x \quad ; \quad x \in \left[\frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{6} \right] \text{ es:}$$

- a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) 3
 d) No existe mínimo f e) 1

33. Si: $\theta \in \left[\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{3} \right]$ para que valores de "x" se cumple que:

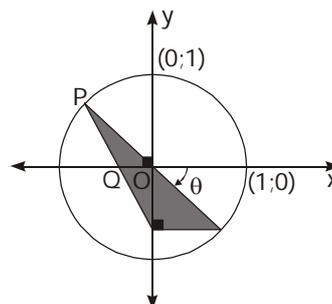
$$(x-1)\text{Sen}^2\theta = 3x+2$$

a) $\left[-\frac{14}{9} ; -\frac{9}{14} \right]$ b) $\left[-\frac{13}{9} ; -\frac{9}{13} \right]$

c) $\left[-\frac{16}{9} ; -\frac{9}{16} \right]$ d) $\left[-\frac{11}{9} ; -\frac{9}{11} \right]$

e) $\left[-\frac{10}{9} ; -\frac{9}{10} \right]$

34. En la figura mostrada, halle el área de la región triangular OQP.

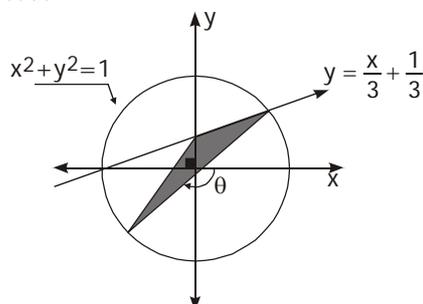


a) $-\frac{\text{Sen}\theta\text{Cos}\theta}{4}$ b) $-\frac{\text{Sen}\theta\text{Cos}\theta}{8}$

c) $-\frac{\text{Sen}\theta\text{Cos}\theta}{16}$ d) $-\frac{\text{Sen}\theta\text{Cos}\theta}{2}$

e) $-\text{Sen}\theta\text{Cos}\theta$

35. En la figura siguiente, calcular el área de la región sombreada.

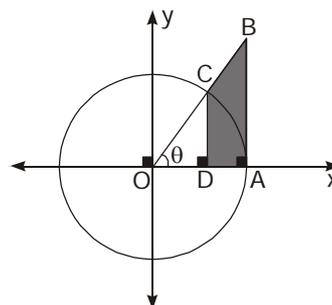


a) $-\text{Cos}(\theta)\mu^2$ b) $-\frac{1}{2}\text{Cos}(\theta)\mu^2$

c) $-\frac{1}{3}\text{Cos}(\theta)\mu^2$ d) $\frac{1}{2}\text{Cos}(\theta)\mu^2$

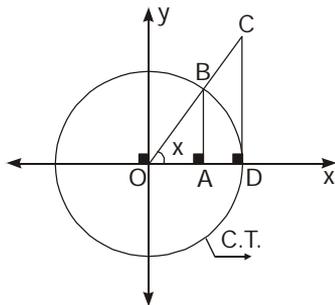
e) $\frac{1}{2}\text{Cos}(\theta)\mu^2$

36. En el círculo trigonométrico mostrado, halle el área de la región sombreada.



- a) $\frac{\text{Sen}^2\theta}{2}$ b) $\frac{\text{Tan}^2\theta}{2}$
 c) $\frac{\text{Tan}\theta\text{Sen}\theta}{2}$ d) $\frac{\text{Tan}^2\theta\text{Sen}\theta}{2}$
 e) $\frac{\text{Tan}\theta\text{Sen}^2\theta}{2}$

37. Según la figura, sólo una de las siguientes afirmaciones es Verdadera para: $0 < x < \frac{\pi}{2}$



- a) $\text{Sen}2x < \frac{x}{2} < \text{Tan}x$
 b) $\text{Sen}x\text{Cos}x < 2x < \text{Tan}x$
 c) $\text{Sen}x < x < \text{Cos}x$
 d) $\text{Cos}x < x < \text{Sen}x$
 e) $\text{Sen}x\text{Cos}x < x < \text{Tan}x$

38. Señale la variación de:

$$M = 4 \text{Tan} \left(\frac{\pi}{4} \text{Sen}^3\theta \right) + 1$$

- a) [-5 ; 4] b) [-4 ; 5] c) [-3 ; 3]
 d) [-6 ; 4] e) [-3 ; 5]

39. Señale la variación de:

$$M = \frac{\text{Sen}^2x - \text{Sen}x + 1}{\text{Sen}^2x - \text{Sen}x + 2}$$

- a) $\left[\frac{3}{7}; \frac{3}{2} \right]$ b) $\left[\frac{3}{7}; \frac{3}{4} \right]$ c) $\left[\frac{2}{7}; \frac{4}{7} \right]$
 d) $\left[\frac{3}{7}; 1 \right]$ e) $\left[\frac{1}{7}; \frac{3}{4} \right]$

40. Señale Verdadero (V) o Falso (F), según corresponda en:

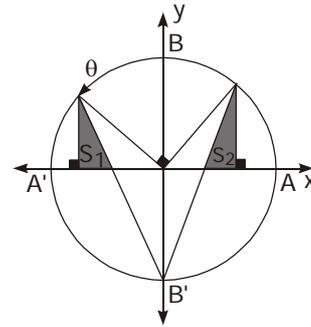
I. $\exists x_1; x_2 \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle / x_1 < x_2$ y
 $\text{Sen}(\text{Tan}x_1) = \text{Sen}(\text{Tan}x_2)$

II. $\exists x_1; x_2 \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle / x_1 < x_2$ y
 $\text{Tan}(\text{Sen}x_1) = \text{Tan}(\text{Sen}x_2)$

III. $\exists x_1; x_2 \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle / x_1 < x_2$ y
 $\text{Cos}(\text{Tan}x_1) = \text{Cos}(\text{Tan}x_2)$

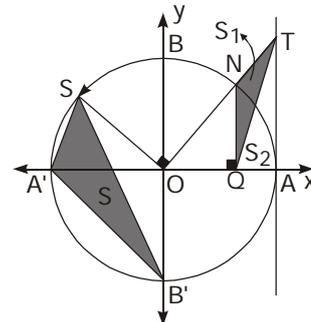
- a) VFV b) VVF c) FFV
 d) FFF e) FVF

41. En la C.T. mostrada: $\frac{S_1}{S_2}$



- a) $-\frac{1}{2} \text{Tan}\theta(\text{Sec}\theta - \text{Tan}\theta - 1)^2$
 b) $-\frac{1}{2} \text{Cos}\theta(\text{Sec}\theta - \text{Tan}\theta - 1)^2$
 c) $\frac{1}{2} \text{Tan}\theta(\text{Sec}\theta - \text{Tan}\theta - 1)^2$
 d) $-\frac{1}{2} \text{Tan}\theta(\text{Sec}\theta + \text{Tan}\theta - 1)^2$
 e) $-\frac{1}{2} \text{Cos}\theta(\text{Sec}\theta - \text{Tan}\theta + 1)^2$

42. En la C.T. mostrada: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{15}{17}$
 Calcular: "S"



- a) $\frac{15}{7} \mu^2$ b) $\frac{12}{17} \mu^2$ c) $\frac{14}{17} \mu^2$
 d) $\frac{16}{17} \mu^2$ e) $\frac{20}{17} \mu^2$

43. Señale Verdadero (V) o Falso (F) en:

- I. $\text{Cos}(\text{Sen}1) < \text{Cos}(\text{Sen}2)$
- II. $\text{Sen}(\text{Cos}2) > \text{Sen}(\text{Cos}3)$
- III. $|\text{Tan}(\text{Sen}4)| > |\text{Tan}(\text{Sen}5)|$

- a) VVF b) VFV c) FFV
- d) FVF e) FVV

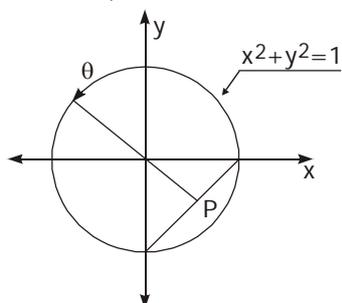
44. Indicar Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda en:

- I. $\text{Sec}(\text{Sen}1) > \text{Sec}(\text{Sen}2)$
- II. $\text{Sec}(\text{Cos}1) > \text{Sec}(\text{Cos}2)$

III. Si: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \text{Sec}\theta > \text{Tan}\theta$

- a) FFF b) FFV c) VFV
- d) FVF e) VVF

45. Del gráfico mostrado, hallar las coordenadas de P.



- a) $\left(\frac{\text{Tan}\theta}{1-\text{Tan}\theta}; \frac{\text{Tan}\theta}{1+\text{Tan}\theta}\right)$
- b) $\left(\frac{1}{1-\text{Tan}\theta}; \frac{-\text{Tan}\theta}{1-\text{Tan}\theta}\right)$
- c) $\left(\frac{1}{1+\text{Tan}\theta}; \frac{-\text{Tan}\theta}{1-\text{Tan}\theta}\right)$
- d) $\left(\frac{1}{1+\text{Tan}\theta}; \frac{-\text{Tan}\theta}{1+\text{Tan}\theta}\right)$
- e) $\left(\frac{1}{1-\text{Tan}\theta}; \frac{\text{Tan}\theta}{1-\text{Tan}\theta}\right)$

46. Sabiendo que:

$$\text{Cot}\alpha - 2\text{Cot}\beta = \text{Tan}\beta$$

Señale la variación de:

$$L = 3|\text{Sen}\alpha| + 1$$

- a) $[0; 2]$ b) $[1; 2]$ c) $[1; 2)$
- d) $\langle 1; 2]$ e) $\langle 1; 3]$

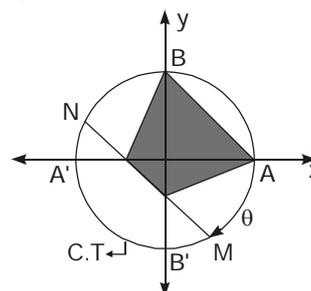
47. Sabiendo que: $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \beta < 2\pi$

Señale Verdadero (V) o Falso (F), según corresponda en:

- I. $\text{Tan}\alpha > \text{Tan}\beta$
- II. $\text{Tan}(\text{Sen}\alpha) > \text{Tan}(\text{Sen}\beta)$
- III. $|\text{Tan}(2 + \text{Cos}\alpha)| > |\text{Tan}(2 + \text{Cos}\beta)|$

- a) FVF b) VVF c) FFV
- d) FFF e) FVV

48. En la circunferencia trigonométrica mostrada, hallar el área de la región sombreada, si $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$

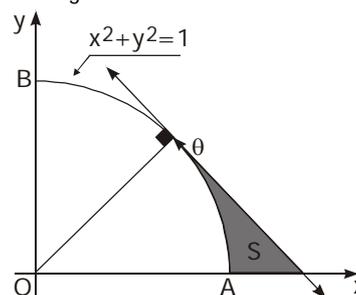


- a) $\text{Vers}\theta\text{Cov}\theta$ b) $\frac{1}{2}\text{Vers}\theta\text{Cos}\theta$
- c) $\frac{1}{2}\text{Vers}\theta\text{Cov}\theta$ d) $\frac{1}{2}\text{Cov}\theta\text{Sen}\theta$
- e) $\frac{1}{4}\text{Vers}\theta\text{Cos}\theta$

49. En la C.T. mostrada, calcular:

$$M = (2S + \theta)\text{Ctg}\theta$$

S: área de la región sombreada.



- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\sqrt{2}$
- d) 1 e) $\frac{2}{3}$

50. Siendo x un arco perteneciente al intervalo $(-\pi; 0)$

Además: $-1 \leq \text{Sen}x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Hallar la variación de:

$$K = \sqrt{3} \tan\left(\left|\frac{x}{2}\right| - \frac{\pi}{6}\right) + 1$$

- a) $\langle 1; 2 \rangle$ b) $\langle \sqrt{2}; 2 \rangle$ c) $\langle \frac{1}{2}; 2 \rangle$
 d) $\langle \frac{1}{2}; 1 \rangle$ e) $\langle \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{2} \rangle$

51. Dado: $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$

Calcular la variación de:

$$T = \text{Cos}^2\theta + \text{Cos}\theta$$

- a) $\left[0; \frac{3+2\sqrt{3}}{4}\right]$ b) $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3+2\sqrt{3}}{4}\right]$
 d) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right]$ e) $\left[\frac{3+\sqrt{3}}{4}; \frac{1}{2}\right]$
 e) $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

52. Si: $\pi < \phi < 2\pi$

Además: $-\frac{\sqrt{7}}{4} \leq \text{Cos}\phi \leq \frac{\sqrt{15}}{4}$

Hallar la extensión de: $\text{Tan}^2\phi$

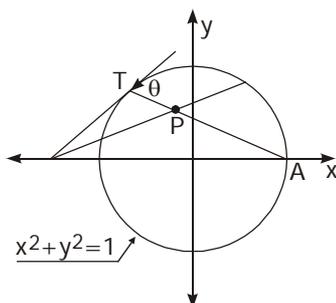
- a) $\langle \frac{9}{7}; \infty \rangle$ b) $\left[\frac{1}{15}; \infty\right)$ c) $[15; \infty)$
 d) $[\sqrt{7}; \infty)$ e) $[7; \infty)$

53. Calcular el valor de $\text{Tan}\theta$, para el cual:

$\frac{3x}{2y} - \text{Csc}\theta + \text{Tan}\theta$, toma su valor máximo, siendo x e y

las coordenadas del punto P.

Además: $2AP = 3TP$



- a) $-\sqrt{6}$ b) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$
 d) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ e) $-\frac{2\sqrt{6}}{3}$

54. Sabiendo que:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{24}; \frac{5\pi}{24}\right)$$

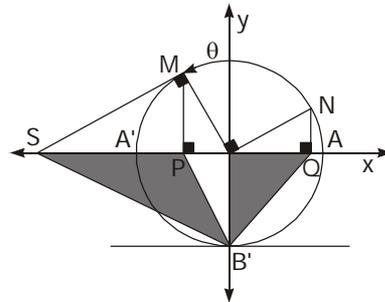
Señale la variación de:

$$L = 2\text{Csc}\left(3\frac{\pi}{4} - 2x\right) - 1$$

- a) $\langle 2; 4 \rangle$ b) $[1; 4]$ c) $\langle 1; 4 \rangle$
 d) $\langle 1; 3 \rangle$ e) $[1; 3]$

55. En la C.T. mostrada, las áreas de las regiones sombreadas son iguales.

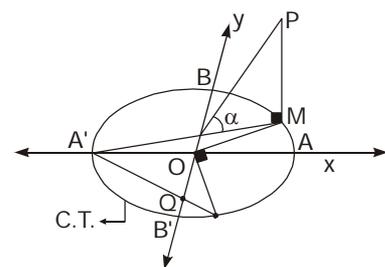
Calcular: $L = \text{Tan}\theta + \text{Tan}^3\theta$



- a) -2 b) -4 c) -3
 d) -6 e) -8

56. En la C.T. mostrada, hallar: $\text{Tan}\alpha$

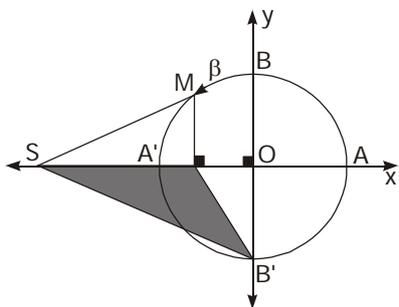
Si: \overline{MP} es una vertical de longitud igual al diámetro de la C.T. y además $OQ = 0,5$



- a) $\frac{2}{3}\sqrt{10}$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{10}$ c) $\frac{3}{4}\sqrt{10}$
 d) $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ e) $\frac{2}{5}\sqrt{10}$

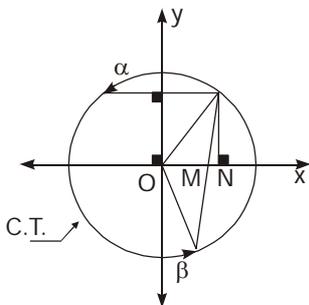
57. Si en la C.T. mostrada, el área de la región sombreada es igual a $2\mu^2$.

Calcular: $L = \text{Sec}^2\beta + \text{Cos}^2\beta$



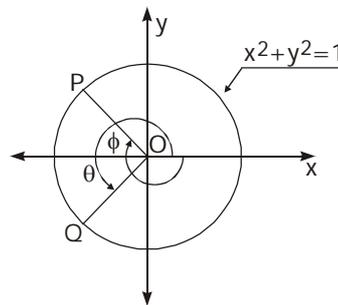
- a) 16 b) 8 c) 6
- d) 18 e) 24

58. Del gráfico, hallar \overline{MN} :



- a) $\frac{\text{Sen}\alpha - \text{Sen}\beta}{\text{Cos}\alpha - \text{Cos}\beta}$ b) $\frac{-\text{Sen}\alpha\text{Sen}\beta}{\text{Sen}\alpha - \text{Cos}\beta}$
- c) $\frac{\text{Cos}\alpha\text{Cos}\beta}{\text{Cos}\beta - \text{Cos}\alpha}$ d) $\frac{\text{Cos}\alpha - \text{Cos}\beta}{\text{Sen}\alpha - \text{Sen}\beta}$
- e) $\frac{\text{Sen}\alpha(\text{Cos}\alpha + \text{Cos}\beta)}{\text{Sen}\beta - \text{Sen}\alpha}$

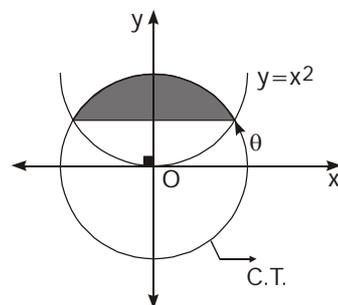
59. De la figura, "G" es el baricentro del triángulo OPQ. Calcular la ecuación de la recta que pasa por G y por el origen del sistema de coordenadas, en términos de θ y ϕ .



- a) $y = \text{Tan}\left(\frac{\phi - \theta}{2}\right) \cdot x$
- b) $y = \text{Tan}\left(\frac{\theta + \phi}{2}\right) \cdot x$
- c) $y = \text{Tan}(\theta - \phi) \cdot x$
- d) $y = \text{Cot}\left(\frac{\phi + \theta}{2}\right) \cdot x$
- e) $y = \text{Ctg}(\phi - \theta) \cdot x$

60. Si "S" representa el área de la región sombreada, reduzca:

$$E = \text{Sen}^2(S + \text{Cos}^3\theta) + \text{Sen}^2\theta$$



- a) 2 b) 1 c) 3
- d) 4 e) $\frac{1}{2}$

Claves

361.	<i>c</i>
362.	<i>d</i>
363.	<i>b</i>
364.	<i>a</i>
365.	<i>b</i>
366.	<i>b</i>
367.	<i>d</i>
368.	<i>a</i>
369.	<i>b</i>
370.	<i>c</i>
371.	<i>e</i>
372.	<i>a</i>
373.	<i>d</i>
374.	<i>d</i>
375.	<i>c</i>
376.	<i>c</i>
377.	<i>d</i>
378.	<i>c</i>
379.	<i>c</i>
380.	<i>b</i>
381.	<i>a</i>
382.	<i>b</i>
383.	<i>b</i>
384.	<i>c</i>
385.	<i>e</i>
386.	<i>c</i>
387.	<i>b</i>
388.	<i>c</i>
389.	<i>d</i>
390.	<i>b</i>

391.	<i>a</i>
392.	<i>b</i>
393.	<i>d</i>
394.	<i>e</i>
395.	<i>c</i>
396.	<i>e</i>
397.	<i>e</i>
398.	<i>e</i>
399.	<i>b</i>
400.	<i>d</i>
401.	<i>a</i>
402.	<i>b</i>
403.	<i>d</i>
404.	<i>d</i>
405.	<i>e</i>
406.	<i>d</i>
407.	<i>e</i>
408.	<i>a</i>
409.	<i>d</i>
410.	<i>a</i>
411.	<i>b</i>
412.	<i>b</i>
413.	<i>d</i>
414.	<i>e</i>
415.	<i>a</i>
416.	<i>c</i>
417.	<i>d</i>
418.	<i>e</i>
419.	<i>b</i>
420.	<i>b</i>