

Capítulo

14

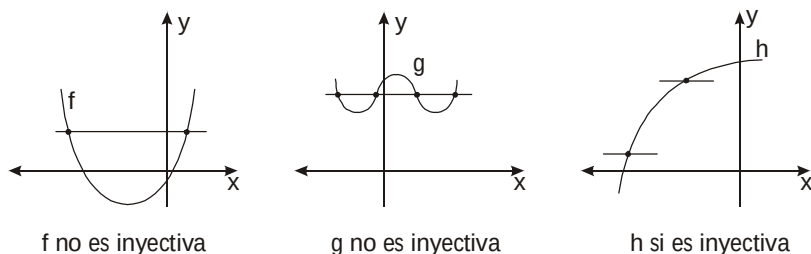
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

OBJETIVO

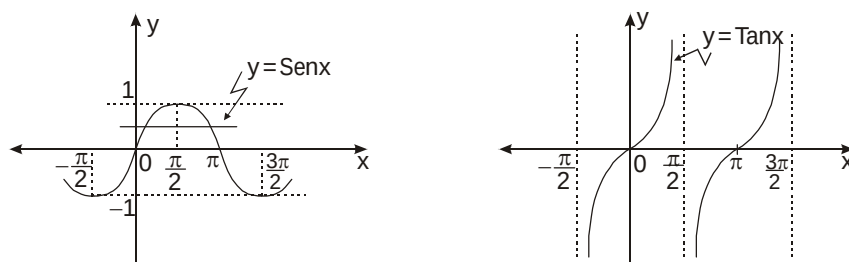
El objetivo del presente capítulo es analizar las funciones inversas de las funciones trigonométricas básicas; así como familiarizarnos con las notaciones $\text{ArcSen}x$, $\text{ArcCos}x$, $\text{ArcTan}x$, etc; de modo que las interpretemos y operacionalicemos correctamente según las propiedades que se darán convenientemente.

INTRODUCCIÓN

Según el análisis de funciones; la condición suficiente para que una función posea inversa, es que debe ser inyectiva :



Las funciones trigonométricas; debido a su carácter periódico no son inyectivas :



Según este comentario, las funciones trigonométricas no poseen inversa. Sin embargo; es posible redefinir la función trigonométrica, restringiendo su dominio (sin alterar su rango), a un intervalo donde sea inyectiva y en consecuencia se pueda obtener su inversa.

OBTENCIÓN Y ANÁLISIS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

I. F.T. SENO INVERSO O ARCO SENO

De la función : $y = \text{Sen}x$

Tomamos el dominio : $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$

El rango no cambia : $[-1 ; 1]$

Luego para hallar la inversa; hacemos en :

$$y = \text{Sen}x$$

↓ ↓

$$x = \text{Sen}y$$

Esto es : "y es un ángulo arco o número cuyo Seno vale x".

Lo cual se denotará : $y = \text{ArcSen}x$

Finalmente, como el dominio y rango se intercambian con el de la función original; tendremos :

f	f *
$y = f(x) = \text{Sen}x$	$y = f^*(x) = \text{ArcSen}x$
Dom : $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	Dom * : $[-1; 1]$
Rang : $[-1; 1]$	Rang * : $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Cumpléndose :

$$\text{ArcSen}(-x) = -\text{ArcSen}x$$

II. F.T. COSENO INVERSO O ARCO COSENO

De la función : $y = \text{Cos}x$

Tomamos el dominio : $[0; \pi]$

Sin cambiar el rango : $[-1; 1]$

Luego para hallar la inversa procedemos igual que en el caso del "ArcSenx"; obteniéndose :

f	f *
$y = f(x) = \text{Cos}x$	$y = f^*(x) = \text{ArcCos}x$
Dom : $[0; \pi]$	Dom * : $[-1; 1]$
Rang : $[-1; 1]$	Rang * : $[0; \pi]$

Cumpléndose :

$$\text{ArcCos}(-x) = \pi - \text{ArcCos}x$$

III. F.T. TANGENTE INVERSO O ARCO TANGENTE

De la función : $y = \text{Tan}x$,

tomamos el dominio : $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

sin cambiar el rango : $\langle -\infty; +\infty \rangle$

Luego, para hallar la inversa de la función Tangente, procedemos igual que en los casos anteriores, obteniéndose :

f	f *
$y = f(x) = \text{Tan}x$	$y = f^*(x) = \text{ArcTan}x$
Dom : $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	Dom * : $\langle -\infty; +\infty \rangle$
Rang : $\langle -\infty; +\infty \rangle$	Rang * : $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Cumpléndose :

$$\text{ArcTan}(-x) = -\text{ArcTan}x$$

IV. F.T. COTANGENTE INVERSA O ARCO COTANGENTE

f	f *
$y = f(x) = \text{Cot}x$	$y = f^*(x) = \text{ArcCot}x$
Dom : $\langle 0; \pi \rangle$	Dom * : $\langle -\infty; +\infty \rangle$
Rang : $\langle -\infty; +\infty \rangle$	Rang * : $\langle 0; \pi \rangle$

Cumplíndose : $\text{ArcCot}(-x) = \pi - \text{ArcCot}x$

V. F.T. SECANTE INVERSA O ARCO SECANTE

f	f *
$y = f(x) = \text{Sec}x$	$y = f^*(x) = \text{ArcSec}x$
$\text{Dom} : [0 ; \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	$\text{Dom}^* : \langle -\infty ; -1 \rangle \cup [1 ; +\infty)$
$\text{Rang} : \langle -\infty ; -1 \rangle \cup [1 ; +\infty)$	$\text{Rang}^* : [0 ; \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

Cumplíndose : $\text{ArcSec}(-x) = \pi - \text{ArcSec}x$

VI. F.T. COSECANTE INVERSA O ARCO COSECANTE

f	f *
$y = f(x) = \text{Csc}x$	$y = f^*(x) = \text{ArcCsc}x$
$\text{Dom} : \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$	$\text{Dom}^* : \langle -\infty ; -1 \rangle \cup [1 ; +\infty)$
$\text{Rang} : \langle -\infty ; -1 \rangle \cup [1 ; +\infty)$	$\text{Rang}^* : \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

PROPIEDADES

1. $\text{F.T. } [\text{Arc F.T.}(n)] = n ; n \in \text{Dom}(\text{Arc F.T.})$

Esto es :

$$\begin{cases} \text{Sen}(\text{ArcSen}(n)) = n, & \forall n \in [-1 ; 1] \\ \text{Cos}(\text{ArcCos}(n)) = n, & \forall n \in [-1 ; 1] \\ \text{Tan}(\text{ArcTan}(n)) = n, & \forall n \in \mathbb{R} \\ \text{Cot}(\text{ArcCot}(n)) = n, & \forall n \in \mathbb{R} \\ \text{Sec}(\text{ArcSec}(n)) = n, & \forall n \in \langle -\infty ; -1 \rangle \cup [1 ; +\infty) \\ \text{Csc}(\text{ArcCsc}(n)) = n, & \forall n \in \langle -\infty ; -1 \rangle \cup [1 ; +\infty) \end{cases}$$

Por ejemplo :

$$\text{Sen}\left(\text{ArcSen}\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Tan}(\text{ArcTan}4) = 4$$

2. $\text{Arc F.T. } [\text{F.T.}(\theta)] = \theta ; \forall \theta \in \text{Rang}(\text{Arc F.T.})$

Esto es :

$$\begin{cases} \text{ArcSen}(\text{Sen}\theta) = \theta, & \forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] \\ \text{ArcCos}(\text{Cos}\theta) = \theta, & \forall \theta \in [0 ; \pi] \\ \text{ArcTan}(\text{Tan}\theta) = \theta, & \forall \theta \in \left\langle -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ \text{ArcCot}(\text{Cot}\theta) = \theta, & \forall \theta \in \langle 0 ; \pi \rangle \\ \text{ArcSec}(\text{Sec}\theta) = \theta, & \forall \theta \in [0 ; \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \\ \text{Csc}(\text{ArcCsc}\theta) = \theta, & \forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] - \{0\} \end{cases}$$

Por ejemplo :

$$\text{ArcSen}\left(\text{Sen}\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5} ; \text{ pues : } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ArcCos}(\text{Cos}1) = 1 ; \text{ pues : } 0 \leq 1 \leq \pi$$

$$\text{ArcTan}(\text{Tan}2) \neq 2 ; \text{ pues } 2 \notin \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$$

En este caso, se le busca un equivalente a "Tan2" en el intervalo correspondiente al rango del ArcTan, así :

$$\text{MA}' = \text{NA} = \pi - 2; \text{ entonces : } \text{AN} = 2 - \pi$$

Note que : $\text{Tan}2 = \text{Tan}(2 - \pi)$ luego :

$$\text{ArcTan}(\text{Tan}2) = \text{ArcTan}[\text{Tan}(2 - \pi)]$$

$$\text{ArcTan}(\text{Tan}2) = 2 - \pi$$

$$\text{ya que : } -\frac{\pi}{2} < 2 - \pi < \frac{\pi}{2}$$

3.

$$\text{ArcSen}x + \text{ArcCos}x = \frac{\pi}{2} ; \forall x \in [-1 ; 1]$$

$$\text{ArcTan}x + \text{ArcCot}x = \frac{\pi}{2} ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ArcSec}x + \text{ArcCsc}x = \frac{\pi}{2} ; \forall x \in (-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty)$$

$$4. \quad \text{ArcTan}x + \text{ArcTany} = \text{ArcTan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + n\pi \begin{cases} \text{Si : } xy < 1 & ; n = 0 \\ \text{Si : } xy > 1, x > 0 & ; n = 1 \\ \text{Si : } xy > 1, x < 0 & ; n = -1 \end{cases}$$

$$5. \quad \text{ArcTan}x - \text{ArcTany} = \text{ArcTan}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right) + n\pi \begin{cases} \text{Si : } xy > -1 & ; n = 0 \\ \text{Si : } xy < -1, x > 0 & ; n = 1 \\ \text{Si : } xy < -1, x < 0 & ; n = -1 \end{cases}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Calcule : $E = \text{ArcSen} \frac{\sqrt{3}}{2} + \text{ArcCos} \frac{\sqrt{2}}{2}$

- a) $\frac{5\pi}{12}$ b) $\frac{7\pi}{12}$ c) $\frac{\pi}{9}$
d) $\frac{\pi}{8}$ e) π

02. Calcule: $E = \text{Sen} \left(\text{ArcSec} \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ e) $\frac{\sqrt{5}}{10}$

03. Halle el valor de: $\text{Cos} 2 \left(\text{ArcTan} \frac{2}{3} \right)$

- a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{13}$
d) $\frac{12}{13}$ e) $\frac{15}{8}$

04. Halle "x", si : $4\text{ArcSen} x = \text{ArcCos} x$

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ e) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

05. Resolver : $\text{ArcTan} \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} = \text{ArcSec} \sqrt{\frac{x}{2}}$

- a) 1 b) 2 c) 0
d) -1 e) -2

06. Si : $\text{ArcCos} y + \text{ArcSen} x = \frac{2\pi}{3}$,
calcule: $M = \text{ArcSen} y + \text{ArcCos} x$

- a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{5}$ e) $\frac{\pi}{6}$

07. La suma de :

$\text{ArcSen} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, $\text{ArcSen} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$, $\text{ArcTan} 0$ y

$\text{ArcSec} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)$ es :

a) 0 b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}$ e) $\frac{4\pi}{3}$

08. Reducir: $M = \text{Sec}^2(\text{ArcTan} 3) + \text{Csc}^2(\text{ArcCot} 4)$

- a) 7 b) 13 c) 15
d) 27 e) 12

09. El resultado de :

$\text{ArcCos} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{2} \text{ArcSen} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ es :

- a) 120° b) 150° c) 60°
d) 30° e) 240°

10. Calcular : $\text{Sec}(\text{Arc Tan} b)$

- a) b^{-1} b) $2b$
c) No se puede determinar
d) $\frac{b}{2}$ e) $\sqrt{1+b^2}$

11. Determinar el valor de la expresión :

$P = \text{Cos} \left\{ \text{ArcSen} \left(\frac{1}{5} \right) + \text{ArcTan} \left(\frac{1}{3} \right) \right\}$

- a) $\frac{4\sqrt{5}-1}{5\sqrt{10}}$ b) $\frac{5\sqrt{5}+1}{6\sqrt{10}}$
c) $\frac{5\sqrt{5}-1}{6\sqrt{10}}$ d) $\frac{6\sqrt{6}+1}{5\sqrt{10}}$
e) $\frac{6\sqrt{6}-1}{5\sqrt{10}}$

12. La expresión trigonométrica $\text{ArcCos} u = z$ significa $\text{Cos} z = u$.

Suponiendo : $z \in [0; \pi]$.

Hallar : $2\text{Sen} \left[\text{ArcCos} \frac{1}{2} \right]$

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\sqrt{3}$
d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

13. Dada la ecuación: $\text{ArcTan}(x+1) - \text{ArcTan}(x-1) = \text{ArcTan}1$
Indicar la suma de las soluciones

a) -2 b) -1 c) 0
d) 1 e) 2

14. Si: $\text{ArcTan}3\alpha + \text{ArcTan}\frac{3\alpha}{2} = \text{ArcTan}3$,
entonces :

a) $9\alpha^2 = 3\alpha - 2$
b) $\alpha = \frac{1}{3}$
c) $9\alpha^2 - 3\alpha = 2$
d) $\alpha = \frac{2}{3}$ ó $\alpha = -\frac{1}{3}$
e) $\alpha = \frac{-2}{3}$ ó $\alpha = \frac{1}{3}$

15. Si: $\text{Tan}(\text{ArcTan}2x) + \text{Cot}(\text{ArcCot}x) = 6$,
calcule: $K = \text{Tan}\left\{\text{ArcCos}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right\}$

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. Dada la función: $g(x) = \frac{2}{3} \text{ArcSen}\left(\frac{2x-1}{3}\right)$,
halle: Dom_g

a) $[-2; 3]$ b) $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$
c) $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$ d) $[-1; 2]$
e) $[-2; 1]$

17. Dada la función :

$$h(x) = \frac{5}{6} \text{ArcCos}\left(\frac{6x-5}{7}\right),$$

halle: Dom_h

a) $\left[-1; \frac{4}{3}\right]$ b) $\left[-\frac{1}{3}; 2\right]$
c) $\left[-2; \frac{1}{3}\right]$ d) $\left[\frac{5}{6}; 2\right]$
e) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right]$

18. Dada la función :

$$g(x) = 2 \text{ArcSen}\frac{x}{2} - \pi,$$

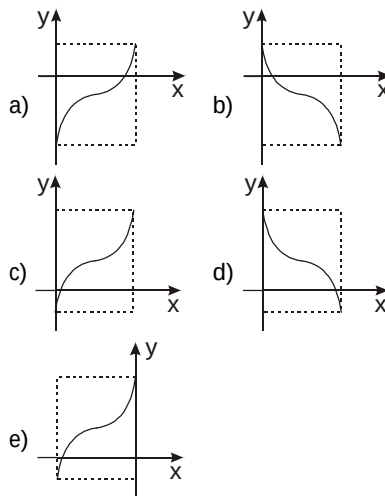
halle: Rango_g

a) $[-\pi; 3\pi]$ b) $[-\pi; \pi]$
c) $[-2\pi; 0]$ d) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$
e) $[0; 2\pi]$

19. Dada la función: $h(x) = \frac{1}{4} \text{ArcCos}4x + \frac{3\pi}{4}$,
halle: Rango_h

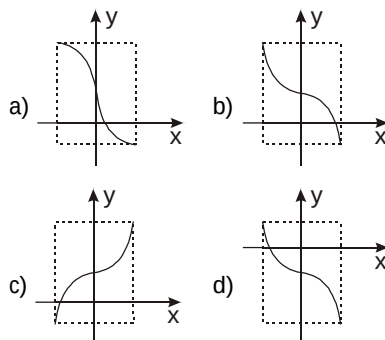
a) $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ b) $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$
c) $\left[\frac{5\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$ d) $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
e) $\left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$

20. Graficar: $y = 4 \text{ArcSen}(x-1) + \pi$



21. Grafique la función :

$$y = 2 \text{ArcCos}x - \frac{\pi}{4}$$



22. Calcule :

$$\theta = \text{ArcSen}\left(\text{Sen}\frac{\pi}{6}\right) + \text{ArcSen}\left(\text{Sen}\frac{5\pi}{6}\right) +$$

$$\text{ArcSen}\left(\text{Sen}\frac{7\pi}{6}\right)$$

- a) 0 b) $-\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{6}$
 d) $\frac{\pi}{3}$ e) $\frac{\pi}{2}$

23. Calcule: $\theta = \text{ArcCos}(\text{Cos}2) + \text{ArcCos}(\text{Cos}4)$

- a) $2\pi - 1$ b) $2\pi + 1$
 c) $2(\pi + 1)$ d) $2(\pi - 1)$
 e) $2(\pi + 2)$

24. Calcular el valor de: $x = \text{ArcTan}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \text{ArcTan}\frac{1}{\sqrt{2}}$

- a) $22^\circ 30'$ b) 45° c) $67^\circ 30'$
 d) 30° e) 60°

25. Hallar x, sabiendo que: $\text{ArcCos}\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right) = \text{ArcSen}x$

- a) 30° b) $\frac{\sqrt{8}}{9}$ c) $\frac{1}{2}$
 d) $\frac{1}{3}$ e) 15°

26. El valor o valores que verifican :

$$\text{Cos}(\text{ArcSen}x) + \text{Sen}(\text{ArcCos}x) = \frac{3}{2}$$

Son :

- a) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ y $\frac{\sqrt{7}}{4}$ b) Sólo $\frac{\sqrt{7}}{4}$
 c) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ y $-\frac{\sqrt{7}}{4}$ d) $-\frac{\sqrt{7}}{4}$
 e) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ y $-\frac{\sqrt{5}}{4}$

27. Hallar : x

$$2\text{ArcCot}2 + \text{ArcCos}\left(\frac{3}{5}\right) = \text{ArcCsc}x$$

- a) 0 b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{24}{5}$
 d) $\frac{7}{25}$ e) $\frac{25}{24}$

28. Señale el rango de la función :

$$y = f(x) = \text{ArcSen}x + \text{ArcCos}x + \text{ArcTan}x$$

- a) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ b) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$
 c) $\left\langle\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$ d) $\left\langle\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\rangle$
 e) $\langle 0; \pi \rangle$

29. Calcule : $\phi = \text{ArcSen}\frac{15}{17} + \text{ArcSen}\frac{3}{5} + \text{ArcSen}\left(-\frac{13}{85}\right)$

- a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{3\pi}{4}$
 d) $\frac{5\pi}{6}$ e) π

30. Al resolver la ecuación :

$$\text{Tan}\left(\text{ArcSen}\sqrt{1-x^2}\right) - \text{Sen}(\text{ArcTan}2) = 0,$$

tenemos :

- a) $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$ b) x no existe.
 c) $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ d) $x = 1$
 e) $x = \frac{33}{65}$

31. Si : $\text{ArcSen}\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}\right) + \text{ArcSen}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) = \frac{\pi}{2}$,

el valor de "α" es :

- a) $\alpha = 1$; $\alpha = 0$ b) $\alpha = \frac{2}{3}$
 c) $0 \leq \alpha \leq 1$ d) $\alpha = 1$; $\alpha = 2$
 e) $\alpha = 1$

32. Evaluar la expresión :

$$\text{Sen}\left[3\text{ArcTan}\frac{1}{\sqrt{11}} - 2\text{ArcTan}\left(\frac{\sqrt{27}-\sqrt{11}}{4}\right)\right]$$

- a) 0 b) 1 c) $\sqrt{3}$
 d) $\sqrt{11}$ e) $\sqrt{27}$

33. Calcular el valor de la siguiente expresión:

$$\text{Sen}\left(2\text{ArcCot}(4) - \text{ArcTan}\left(\frac{5}{12}\right)\right)$$

- a) $\frac{9}{100}$ b) $\frac{19}{200}$ c) $\frac{21}{221}$
 d) 0 e) $\frac{1}{10}$

34. Si $0 \leq x \leq 1$, entonces, podemos afirmar que $\text{ArcCos}(2x^2 - 1)$ es igual a :

- a) $\text{Arc Cos} x$ b) $\text{Arc Sen} x$
 c) $2 \text{Arc Sen} x$ d) $2 \text{Arc Cos} x$
 e) $\text{Arc Cos} 2x$

35. Resolver la ecuación: $\text{ArcSen} 2x + \text{ArcSen} x = \frac{\pi}{3}$

- a) $x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}$ b) $x = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{7}}$
 c) 1 d) $x = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{7}}$
 e) $x = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{7}}$

36. Si : $x = \text{ArcCot} \sqrt{\text{Sec} \theta} - \text{ArcTan} \sqrt{\text{Sec} \theta}$ y $\text{Cos} x > 0$, el valor de $\text{Sen} x$ es :

- a) $\tan^2 \frac{\theta}{2}$ b) $-\cot^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$
 c) $-\tan^2 \frac{\theta}{2}$ d) $\tan^2 \theta$
 e) $\cot^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$

37. Calcular el valor de "m", para que se cumpla la siguiente igualdad: $\text{Sen}(\text{ArcTan} m) = \text{Tan}(\text{ArcSen} m)$

- a) 1 b) 0 c) -1
 d) 2 e) -2

38. Resolver: $\text{ArcCos} \left(x + \frac{1}{2} \right) + \text{ArcCos} x + \text{ArcCos} \left(x - \frac{1}{2} \right) = \frac{3\pi}{2}$

- a) $\{0\}$ b) $\{-1 ; 0 ; 1\}$
 c) $\{0 ; 1\}$ d) $\left\{ 0 ; \frac{1}{4} \right\}$
 e) $\left\{ -\frac{1}{4} ; 0 ; \frac{1}{4} \right\}$

39. Si : $\alpha = a + b + c$, halle :

$$\phi = \text{ArcTan} \sqrt{\frac{a\alpha}{bc}} + \text{ArcTan} \sqrt{\frac{b\alpha}{ac}} + \text{ArcTan} \sqrt{\frac{c\alpha}{ab}}$$

- a) 0 b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{6}$
 d) $\frac{2\pi}{3}$ e) π

40. Reduzca: $\phi = 2 \text{ArcTan} x + \text{ArcSen} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)$

Para : $x \in \langle -\infty ; -1 \rangle$

- a) π b) $2 \text{ArcTan} x$
 c) $4 \text{ArcTan} x$ d) $-\pi$
 e) 0

41. Señale el número de raíces de la ecuación:

$$2\pi = \sqrt{x-2} + \sqrt{6-x} + 2 \text{ArcCos} \left(\frac{x}{2} - 2 \right)$$

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) Ninguna

42. Acerca de la función: $f(x) = \text{ArcSen} \left(1 - \sqrt[3]{x^2} \right)$

Podemos afirmar que :

I. $\text{Dom}_f : [0 ; 2\sqrt{2}]$

II. $\text{Ran}_f : \left[0 ; \frac{\pi}{2} \right]$

III. "f" es decreciente $\forall x \in \langle 0 ; 1 \rangle$

Luego, es correcto :

- a) Sólo I b) Sólo II
 c) Sólo III d) I y II
 e) II y III

43. Si : $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2} \right]$, determine el rango de la

$$\text{función: } g(x) = \frac{3\pi}{6 \text{ArcCos} x + \pi}$$

- a) $[1 ; 2]$ b) $\left[\frac{1}{2} ; 1 \right]$
 c) $\left[\frac{3}{7} ; 3 \right]$ d) $\left[\frac{1}{2} ; \frac{3}{2} \right]$
 e) $\left[\frac{3}{5} ; \frac{3}{2} \right]$

44. Calcular el valor de :

$$\text{Cos} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \text{ArcSen} \frac{1}{4} \right)$$

- a) $\pm \left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{4} \right)$ b) $-\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{4} \right)$

c) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{4}$

e) $-\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{4}\right)$

45. Señale el dominio de la función :

$$h(x) = \frac{1}{4} \text{ArcCos}\left(\frac{3x - |x|}{4}\right)$$

- a) $[-2; 2]$ b) $[-1; 1]$
 c) $[-1; 2]$ d) $[-2; 1]$
 e) $[0; 3]$

46. Obtenga el valor de la expresión :

$$A = \frac{\text{ArcSen}(x-2) + \text{ArcCos}x + \text{ArcTan}\sqrt{x+2}}{\text{ArcCot}\sqrt{2x-1} + \text{ArcCsc}\sqrt{x^2+1}}$$

- a) 0 b) $-\frac{2}{3}$ c) $\frac{5}{3}$
 d) $-\frac{1}{3}$ e) $-\frac{3}{5}$

47. Reduzca :

$$J = \text{ArcSen}\frac{2}{3} - \text{ArcSen}\left(\frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{12}\right)$$

- a) $\text{ArcSen}\frac{1}{6}$ b) $\text{ArcSen}\frac{2}{5}$
 c) $\text{ArcSen}\frac{1}{4}$ d) $\text{ArcSen}\frac{2}{7}$
 e) $\text{ArcSen}\frac{1}{3}$

48. Halle el valor de la expresión :

$$N = \text{Sen}^3\left(\frac{\pi}{4} + \text{ArcCos}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \text{Cos}^3\left(\frac{\pi}{4} + \text{ArcSen}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

- a) $\frac{7\sqrt{6}}{18}$ b) $\frac{5\sqrt{6}}{18}$ c) $\frac{7\sqrt{3}}{9}$
 d) $\frac{5\sqrt{2}}{9}$ e) $\frac{7\sqrt{2}}{4}$

49. Si: $\text{ArcSen}x + \text{ArcSen}y + \text{ArcSen}z = \pi$,

calcule: $H = \frac{\sqrt{1-x^2}}{yz} + \frac{\sqrt{1-y^2}}{zx} + \frac{\sqrt{1-z^2}}{xy}$

- a) 1 b) 2 c) -2
 d) 4 e) -4

50. Calcule :

$$\theta = \frac{1}{2} \text{ArcTan}\left(\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{3} \text{ArcTan}\left(\frac{2\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt{3}}\right)$$

- a) $\frac{\pi}{10}$ b) $\frac{\pi}{18}$ c) $\frac{\pi}{36}$
 d) $\frac{\pi}{40}$ e) $\frac{\pi}{72}$

51. Resolver :

$$\text{ArcTan}\left(\frac{x}{1-x}\right) + \text{ArcTan}\left(\frac{1+x}{x}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

- a) $\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$ b) $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ c) $\sqrt[4]{6}$
 d) $\sqrt[4]{\frac{4}{5}}$ e) $\sqrt[3]{2}$

52. Al resolver la ecuación: $x^3 - 3x - 1 = 0$,
 se obtiene como raíces: x_1, x_2, x_3

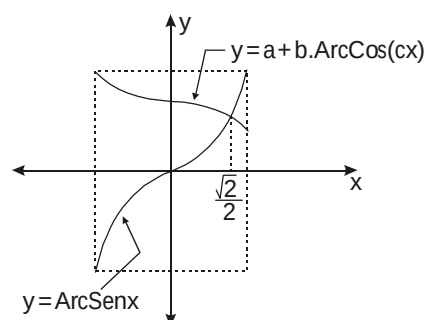
Calcule el valor de :

$$\sum_{k=1}^3 \text{ArcSen}\left(\frac{1}{2}x_k\right)$$

- a) $-\frac{\pi}{9}$ b) $\frac{\pi}{10}$ c) $\frac{\pi}{18}$
 d) $\frac{13\pi}{9}$ e) $\frac{26\pi}{9}$

53. Del gráfico mostrado, halle :

$$a + 3b - c$$



- a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{4}$
 d) $\frac{\pi}{3}$ e) $\frac{7\pi}{12}$

54. Se define la función :

$$f(x) = \sqrt{\text{ArcTan}^2x - 4\text{ArcTan}x + 3}$$

Halle el dominio de dicha función :

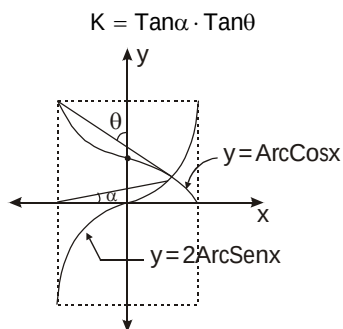
- a) $(-\infty; \tan 1]$ b) $[\tan 1; +\infty)$
 c) $\mathbb{R}$ d) $[-\tan 1; \tan 1]$
 e) $[0; \tan 1]$

55. Qué valor de "x" maximiza :

$$y = f(x) = (\text{ArcSen}x)^5 (\text{ArcCos}x)$$

- a) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
 c) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
 e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

56. Del gráfico, calcular :



- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) 2
 d) 4 e) $\frac{3}{4}$

57. Dada la función "f" definida por :

$$f(x) = \text{ArcSen}x - \text{ArcCot}x,$$

halle :

$$\left(\frac{f_{\text{máx}} + f_{\text{mín}}}{2} \right)$$

- a) $-\frac{\pi}{4}$ b) $-\frac{\pi}{2}$ c) 0
 d) $\frac{\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{2}$

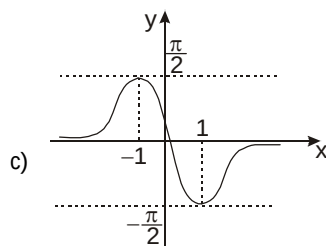
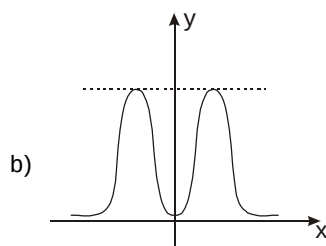
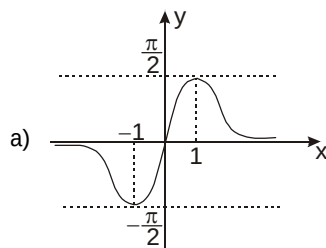
58. Calcule :

$$M = \text{ArcTan} \left(\frac{\sqrt{3}}{\text{Csc} 10^\circ - 1} \right)$$

- a) $\frac{\pi}{10}$ b) $\frac{\pi}{9}$ c) $\frac{\pi}{5}$
 d) $\frac{\pi}{18}$ e) $\frac{\pi}{20}$

59. Graficar :

$$y = f(x) = \text{ArcSen} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)$$



60. Si :

$$\tan(2 \text{ArcTan} \sqrt{\cos 2\beta}) \cdot \sin(\text{ArcCsc} \sqrt{\sec 2\beta})$$

$$= m \text{Csc}^n \beta + p$$

$$\text{Calcule : } W = m + n - p$$

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5

Claves

01.	<i>b</i>
02.	<i>c</i>
03.	<i>c</i>
04.	<i>d</i>
05.	<i>b</i>
06.	<i>b</i>
07.	<i>b</i>
08.	<i>d</i>
09.	<i>a</i>
10.	<i>e</i>
11.	<i>e</i>
12.	<i>c</i>
13.	<i>c</i>
14.	<i>b</i>
15.	<i>b</i>
16.	<i>d</i>
17.	<i>b</i>
18.	<i>c</i>
19.	<i>b</i>
20.	<i>c</i>
21.	<i>b</i>
22.	<i>c</i>
23.	<i>d</i>
24.	<i>b</i>
25.	<i>d</i>
26.	<i>c</i>
27.	<i>e</i>
28.	<i>b</i>
29.	<i>b</i>
30.	<i>a</i>

31.	<i>a</i>
32.	<i>a</i>
33.	<i>c</i>
34.	<i>d</i>
35.	<i>a</i>
36.	<i>a</i>
37.	<i>b</i>
38.	<i>a</i>
39.	<i>e</i>
40.	<i>d</i>
41.	<i>a</i>
42.	<i>c</i>
43.	<i>b</i>
44.	<i>c</i>
45.	<i>c</i>
46.	<i>d</i>
47.	<i>c</i>
48.	<i>a</i>
49.	<i>b</i>
50.	<i>c</i>
51.	<i>b</i>
52.	<i>c</i>
53.	<i>b</i>
54.	<i>a</i>
55.	<i>d</i>
56.	<i>a</i>
57.	<i>b</i>
58.	<i>b</i>
59.	<i>a</i>
60.	<i>c</i>