

Capítulo

11

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE LA VARIABLE TRIPLE

Seno de 3x	Coseno de 3x	Tangente de 3x
$\text{Sen} 3x = 3\text{Sen} x - 4\text{Sen}^3 x$	$\text{Cos} 3x = 4\text{Cos}^3 x - 3\text{Cos} x$	$\text{Tan} 3x = \frac{3\text{Tan} x - \text{Tan}^3 x}{1 - 3\text{Tan}^2 x}$

FÓRMULAS ESPECIALES:

$\text{Sen} 3x = \text{Sen} x (2\text{Cos} 2x + 1)$	$\text{Cos} 3x = \text{Cos} x (2\text{Cos} 2x - 1)$	$\text{Tan} 3x = \text{Tan} x \left(\frac{2\text{Cos} 2x + 1}{2\text{Cos} 2x - 1} \right)$
---	---	---

DEGRADACIONES:

$4\text{Sen}^3 x = 3\text{Sen} x - \text{Sen} 3x$	$4\text{Cos}^3 x = 3\text{Cos} x + \text{Cos} 3x$
---	---

PROPIEDADES :

$\text{Sen} x \cdot \text{Sen}(60^\circ - x) \text{Sen}(60^\circ + x) = \frac{1}{4} \text{Sen} 3x$
$\text{Cos} x \cdot \text{Cos}(60^\circ - x) \text{Cos}(60^\circ + x) = \frac{1}{4} \text{Cos} 3x$
$\text{Tan} x \cdot \text{Tan}(60^\circ - x) \text{Tan}(60^\circ + x) = \text{Tan} 3x$
$\text{Tan} x + \text{Tan}(60^\circ + x) + \text{Tan}(120^\circ + x) = 3\text{Tan} 3x$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Señala el equivalente de la expresión:

$$\frac{\operatorname{Sen} 3x + \operatorname{Sen}^3 x}{\operatorname{Cos}^3 x - \operatorname{Cos}^3 x}$$

- a) Tgx b) Secx c) Cscx
d) Ctgx e) N.A.

02. Simplificar:

$$E = (\operatorname{Tg} 2A + \operatorname{Tg} A)(\operatorname{Cos} 3A + \operatorname{Cos} A) \operatorname{Csc} 3A$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) N.A.

03. La expresión que da $\operatorname{Cos} 3x$ en términos de $\operatorname{Cos} x$ es:

- a) $3\operatorname{Cos} x + 4\operatorname{Cos}^3 x$ b) $4\operatorname{Cos} x - 3\operatorname{Cos}^3 x$
c) $3\operatorname{Cos} x - 4\operatorname{Cos}^3 x$ d) $4\operatorname{Cos} 3x - 3\operatorname{Cos} x$
e) $3\operatorname{Cos} 3x - 4\operatorname{Cos} x$

04. El valor de la expresión:

$$\frac{\operatorname{Sen} 3a}{\operatorname{Sen} a} - \frac{\operatorname{Cos} 3a}{\operatorname{Cos} a} \text{ es:}$$

- a) 5 b) 4 c) 3
d) 2 e) 1

05. Si: $\operatorname{Tgx} = \frac{1}{11}$. Calcular: $\operatorname{Tg} 3x$.

- a) 3,07 b) 0,27 c) 3,27
d) 32 e) 0,21

06. $\operatorname{Sen} 2a = \operatorname{Cos} 3a$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$

Calcular el valor de: $\operatorname{Sen} a$

- a) $\frac{1+\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ c) $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$
d) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ e) N.A.

07. Si: $\operatorname{Sen} A = \frac{2}{3}$, entonces $\operatorname{Sen} 3A$ es:

- a) 1 b) $\frac{19}{23}$ c) $\frac{27}{22}$
d) $\frac{21}{29}$ e) $\frac{22}{27}$

08. Calcular el valor de:

$$F = (3 - 4\operatorname{Sen}^2 10^\circ)(1 - 2\operatorname{Sen}^2 40^\circ)$$

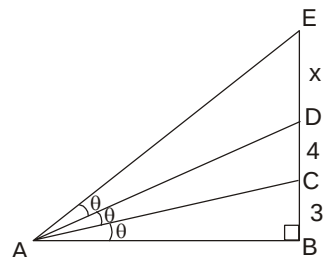
- a) 1 b) -1 c) $\frac{1}{2}$
d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{3}$

09. Simplificar:

$$\frac{\operatorname{Cos}^3 \theta - \operatorname{Cos} 3\theta}{\operatorname{Cos} \theta} + \frac{\operatorname{Sen}^3 \theta + \operatorname{Sen} 3\theta}{\operatorname{Sen} \theta}$$

- a) $\operatorname{Cos} \theta$ b) $\operatorname{Sen} \theta$ c) 1
d) 3 e) 0

10. Del gráfico mostrado, hallar: "x".



- a) 4 b) 7 c) 17
d) 8 e) $2\sqrt{7}$

11. Simplificar:

$$\frac{\operatorname{Cos}^3 20^\circ + \operatorname{Cos}^3 40^\circ}{\operatorname{Cos} 20^\circ + \operatorname{Cos} 40^\circ}$$

- a) 3 b) 4 c) $\frac{4}{3}$
d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{3}{2}$

12. Reducir:

$$2\operatorname{Cos} 6x \cdot \operatorname{Sen} 3x + \operatorname{Sen} 3x$$

- a) $\operatorname{Sen} 6x$ b) $3\operatorname{Sen} 6x$ c) $\operatorname{Sen} 9x$
d) $\operatorname{Cos} 9x$ e) $3\operatorname{Cos} 6x$

13. La siguiente igualdad es una identidad:

$$\frac{\operatorname{Sen} 3\theta}{\operatorname{Sen} \theta} + \frac{\operatorname{Cos} 3\theta}{\operatorname{Cos} \theta} = 2K\operatorname{Cos} \theta$$

Hallar: "K".

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 4 e) 3

14. Calcular: $\operatorname{Sen}^3 18^\circ + \operatorname{Cos}^3 36^\circ$

- a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{8}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ e) $-\frac{\sqrt{5}}{4}$

15. Calcular: $\operatorname{Cot} 18^\circ (4\operatorname{Cos} 18^\circ - 3\operatorname{Sec} 18^\circ)$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) $\sqrt{5}$

16. Calcular:

$$\tan 9^\circ + \cot 9^\circ - \tan 27^\circ - \cot 27^\circ$$

- a) 2 b) 4 c) 6
d) 0 e) 8

17. Calcular:

$$\cos 85^\circ (1 + 2 \sin 80^\circ)$$

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

18. Simplificar:

$$\tan 3\theta (2 \cos 2\theta - 1) - (2 \cos 2\theta + 1) \tan \theta$$

- a) $\tan \theta$ b) $\cot \theta$ c) 0
d) $\tan 3\theta$ e) $\cot 3\theta$

19. Calcular:

$$3 \cos^2 10^\circ \cdot \sec^2 50^\circ \cdot \sec^2 70^\circ$$

- a) 64 b) 9/64 c) 1/64
d) 192 e) 64/9

20. Calcular:

$$\sec \frac{2\pi}{9} + 8 \cos^2 \frac{2\pi}{9}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 5 e) 6

21. Siendo : $\cot \theta = 2\sqrt{2}$; " θ " agudo.

Calcular : $\sin 3\theta$

- a) $\frac{7}{9}$ b) $-\frac{7}{9}$ c) $\frac{23}{27}$
d) $-\frac{23}{27}$ e) $\frac{17}{27}$

22. Si : $\cos 2x = \frac{1}{3}$,

hallar : $\cos 6x$

- a) $\frac{22}{27}$ b) $\frac{23}{27}$ c) $-\frac{22}{27}$
d) $\frac{17}{27}$ e) $-\frac{23}{27}$

23. Hallar : $\sin 111^\circ$

- a) $\frac{8}{125}$ b) $\frac{108}{125}$ c) $\frac{117}{125}$

- d) $\frac{107}{125}$ e) $\frac{9}{125}$

24. Sabiendo que :

$$\cot \alpha = -2\sqrt{2} ; \alpha \in \text{IIIC}$$

calcular :

$$C = \sin 3\alpha \sec \alpha$$

- a) $\frac{17\sqrt{2}}{36}$ b) $-\frac{17\sqrt{2}}{36}$ c) $\frac{23\sqrt{2}}{36}$
d) $-\frac{23\sqrt{2}}{36}$ e) $-\frac{7\sqrt{2}}{36}$

25. Siendo : $\sin \phi = \frac{2}{3}$

$$\text{Calcular : } C = \frac{\cos 3\phi}{\cos \phi}$$

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $-\frac{7}{9}$
d) $-\frac{1}{3}$ e) $-\frac{2}{9}$

26. Sabiendo que : $\cos \theta = \frac{1}{3\sqrt{2}}$,

calcular : $P = \sin 3\theta \csc \theta$

- a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $-\frac{7}{9}$
d) $-\frac{2}{9}$ e) $-\frac{4}{9}$

27. Señale el valor de " $\sin x$ ", si :

$$\sin 2x = \cos 3x$$

- a) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ b) $\frac{-\sqrt{5}-1}{4}$
c) ± 1
d) a y c son respuestas.
e) a, b y c son respuestas.

28. Reducir :

$$A = \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

- a) $\cos x$ b) $\sin 2x$ c) $\sin 4x$
d) $4 \cos 2x$ e) 2

29. Siendo : $\text{Sen}\theta = \frac{1}{3}$,
calcular : $L = \frac{\text{Cos}3\theta}{\text{Cos}\theta}$

- a) $\frac{11}{3}$ b) $\frac{7}{2}$ c) $-\frac{11}{3}$
d) 2 e) $\frac{5}{9}$

30. Reducir :

$$C = (\text{Cos}3x + 2\text{Cos}x) \text{Tan}x$$

- a) $\text{Sen}3x \text{ Cos}x$ b) $\text{Tan}3x$
c) $\text{Sen}3x$ d) $\text{Cos}3x \text{ Sen}x$
e) $\text{Cot}3x$

31. Si : $\text{Sen}3x = 0,25 \text{ Sen}x$,

calcule : $K = 5\text{Tan}^2x + 1$

- a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 12

32. Si : $\text{Tan}3x = 5\text{Tan}x$,
calcule : $|\text{Tan}2x|$

- a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{14}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$
d) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ e) $\sqrt{5}$

33. Al calcular el valor de :

$$F = \frac{1}{\text{Sen}10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\text{Cos}10^\circ},$$

obtenemos :

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 5 e) 4

34. El valor de :

$$E = \text{Cos}80^\circ \text{Cos}20^\circ \text{Cos}40^\circ \text{ es:}$$

- a) 2 b) $\frac{3}{4}$ c) 4
d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{8}$

35. Simplificar :

$$E = \frac{\text{Sen}20^\circ}{1 - \sqrt{3}\text{Sen}20^\circ}$$

- a) $2\text{Tan}20^\circ$ b) $\text{Tan}40^\circ$ c) $2\text{Tan}40^\circ$
d) $\text{Tan}20^\circ$ e) $\text{Sec}20^\circ$

36. Simplificar :

$$C = \frac{\text{Sen}3x - 2\text{Sen}x}{\text{Cos}3x}$$

- a) $-\text{Tan}x$ b) $\text{Tan}x$ c) $\text{Cot}x$
d) $-\text{Cot}x$ e) $-\text{Tan}^2x$

37. Siendo :

$$\frac{\text{Sen}3x + \text{Sen}^3x}{\text{Cos}3x - \text{Cos}^3x} = \frac{1}{3},$$

calcular : $L = \text{Tan}3x \text{ Cot}x$

- a) $\frac{6}{13}$ b) $-\frac{3}{13}$ c) $-\frac{12}{13}$
d) $\frac{3}{13}$ e) $-\frac{6}{13}$

38. Calcular el máximo valor de :

$$M = \text{Tan}3x \cdot \text{Cot}^3x ; \quad x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$$

- a) $17 - 12\sqrt{2}$ b) $17 + 12\sqrt{2}$
c) $12 + 17\sqrt{2}$ d) $12 - 17\sqrt{2}$
e) $5 - \sqrt{2}$

39. Si : $\text{Sen}18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$,

hallar el valor de M,
si :

$$M\text{Sec}15^\circ \text{Sec}9^\circ = \text{Sen}15^\circ \text{Sen}9^\circ$$

- a) $\frac{1}{8\sqrt{5}+8}$ b) $\frac{8}{\sqrt{5}+1}$
c) $\frac{1}{4\sqrt{5}+4}$ d) $\frac{\sqrt{5}-1}{8}$
e) $4(\sqrt{5}-1)$

40. Al simplificar la expresión :

$$E = \text{Sen}6^\circ \text{Sen}54^\circ \text{Sen}66^\circ$$

Obtenemos :

- a) $\text{Sen}12^\circ$ b) $2\text{Sen}6^\circ$
c) $\text{Sen}18^\circ$ d) $2\text{Sen}12^\circ$
e) $\frac{\text{Sen}18^\circ}{4}$

41. Calcular el valor aproximado de la expresión :

$$S = \text{Csc}27^\circ - \text{Sec}27^\circ$$

- a) $3 - \sqrt{5}$ b) $3 + \sqrt{5}$

- c) $\sqrt{2}(3-\sqrt{5})$ d) $5+\sqrt{5}$
 e) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

42. El valor de :

$$x = \frac{1+4\cos 20^\circ}{\sqrt{3}}$$

Es igual a :

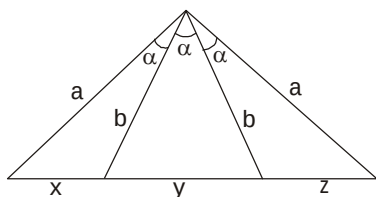
- a) $\cot 10^\circ$ b) $\tan 10^\circ$ c) $\cot 20^\circ$
 d) $\tan 20^\circ$ e) $2\tan 10^\circ$

43. Calcular el valor de ,

$$\frac{\sin 3\theta \cos^2 \theta \sin \theta - \cos 3\theta \sin^2 \theta \cos \theta}{(\sin \theta \cos \theta)^2}$$

- a) 1 b) -1 c) 2
 d) -2 e) $\frac{1}{2}$

44. En el triángulo de la figura, hallar el ángulo α , para que a sea doble de b.



- a) $\arccos \frac{3}{2}$ b) $\arccos \frac{2}{3}$
 c) $\arccos \frac{1}{4}$ d) $\arccos \frac{1}{2}$
 e) $\arccos \frac{3}{4}$

45. Calcule:

$$M = \frac{\sin^3 17^\circ + \cos^3 13^\circ}{\sin 17^\circ + \cos 13^\circ}$$

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{8}$
 d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{1}{4}$

46. Si :

$$\sin 3x \csc x + \cos 3x \sec x = K \csc p \cdot x,$$

calcular : K + p

- a) 2 b) 3 c) 4
 d) 6 e) 8

47. Si : $\cos 39^\circ = n \cos 13^\circ$,

halle : $\tan^2 13^\circ$ en términos de "n"

- a) $\frac{3+n}{1-n}$ b) $\frac{2+n}{1+n}$ c) $\frac{3-n}{1+n}$
 d) $\frac{2-n}{1+n}$ e) $\frac{1-n}{3+n}$

48. Si : $\frac{\tan 3x}{\tan x} = \frac{n+1}{n-1}$,

halle : $\frac{\sin x}{\sin 3x}$ en términos de "n"

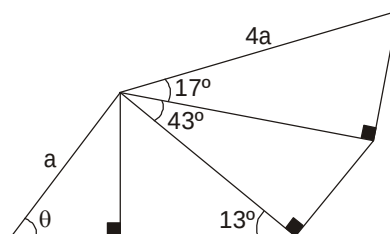
- a) n + 1 b) $(n+1)^{-1}$ c) $\frac{2}{n}$
 d) n - 1 e) $(n-1)^{-1}$

49. Sabiendo que : $\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\sin 3y}{\sin y} + \frac{\sin 3z}{\sin z} = n$,

$$\text{hallar : } L = \frac{\cos 3x}{\cos x} + \frac{\cos 3y}{\cos y} + \frac{\cos 3z}{\cos z}$$

- a) n + 3 b) n - 3 c) n + 6
 d) n - 6 e) 2n - 6

50. Del gráfico, hallar la medida del ángulo "θ"



- a) 39° b) 17° c) 36°
 d) 51° e) 48°

51. El valor de :

$$2\sec^2 10^\circ \sec^2 50^\circ \sec^2 70^\circ \text{ es :}$$

- a) $\frac{128}{3}$ b) $\frac{9}{64}$ c) $\frac{1}{64}$
 d) 192 e) $\frac{64}{9}$

52. El valor de :

$$G = \cot 24^\circ \cot 57^\circ - \cot 24^\circ \cot 33^\circ$$

- a) 2 b) $\sqrt{3}$ c) -2
 d) -1 e) 1

53. Hallar el valor de la expresión :

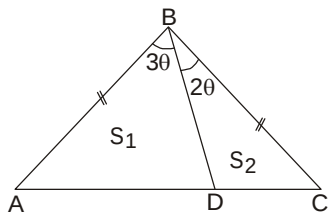
$$M = \tan^2 20^\circ + \tan^2 40^\circ + \tan^2 80^\circ$$

- a) 12 b) 9 c) 21
d) 24 e) 33

54. En el gráfico :

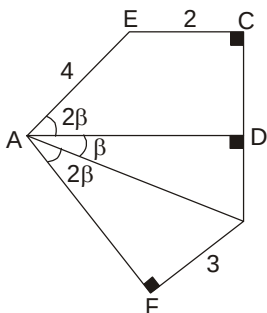
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{95}{84},$$

calcular " θ "



- a) $\text{ArcCos} \frac{6}{7}$ b) $\text{ArcCos} \frac{8}{9}$
c) $\text{ArcCos} \frac{9}{10}$ d) $\text{ArcCos} \frac{10}{11}$
e) $\text{ArcCos} \frac{5}{6}$

55. Del gráfico, calcular : $\text{Sen} 3\beta$



- a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{6}$

56. Desde un punto en tierra, se divisa lo alto de una torre; con un ángulo de elevación " θ ". Si nos acercamos una distancia igual a la altura de la torre, el ángulo de elevación es " $90^\circ - 2\theta$ ".

Calcular el valor de :

$$L = \sec 2\theta + \tan \theta$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6

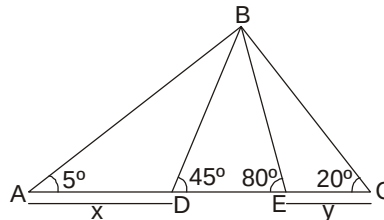
57. Calcular :

$$L = \tan 130^\circ \tan 10^\circ + \tan 70^\circ \tan 130^\circ$$

$$\tan 10^\circ \tan 70^\circ$$

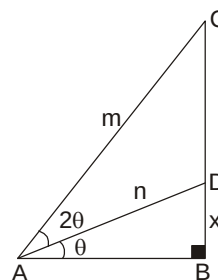
- a) 3 b) -3 c) 2
d) 2 e) 6

58. Del gráfico, hallar : $\frac{x}{y}$



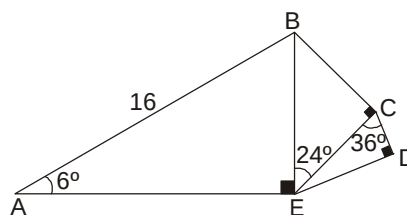
- a) $\sqrt{2} \csc 5^\circ$ b) $\sqrt{2} \csc 10^\circ$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2} \csc 5^\circ$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2} \csc 10^\circ$
e) $\frac{\sqrt{2}}{4} \csc 5^\circ$

59. Del gráfico, hallar : x



- a) $\frac{m}{2} \sqrt{\frac{m+n}{m}}$ b) $\frac{n}{2} \sqrt{\frac{m+n}{m}}$
c) $\frac{n}{2} \sqrt{\frac{m-n}{m}}$ d) $\frac{n}{2} \sqrt{\frac{m-n}{n}}$
e) $\frac{m}{2} \sqrt{\frac{m+n}{n}}$

60. Del gráfico, hallar la longitud de $\overline{CD}$



- a) 1,23 b) 2,23 c) 1,36
d) 3,23 e) 2,32

Claves

01.	<i>a</i>
02.	<i>b</i>
03.	<i>d</i>
04.	<i>d</i>
05.	<i>b</i>
06.	<i>b</i>
07.	<i>e</i>
08.	<i>c</i>
09.	<i>d</i>
10.	<i>d</i>
11.	<i>d</i>
12.	<i>c</i>
13.	<i>c</i>
14.	<i>c</i>
15.	<i>b</i>
16.	<i>b</i>
17.	<i>d</i>
18.	<i>c</i>
19.	<i>a</i>
20.	<i>e</i>
21.	<i>c</i>
22.	<i>e</i>
23.	<i>c</i>
24.	<i>d</i>
25.	<i>c</i>
26.	<i>c</i>
27.	<i>a</i>
28.	<i>e</i>
29.	<i>e</i>
30.	<i>c</i>

31.	<i>c</i>
32.	<i>d</i>
33.	<i>e</i>
34.	<i>e</i>
35.	<i>b</i>
36.	<i>b</i>
37.	<i>d</i>
38.	<i>a</i>
39.	<i>a</i>
40.	<i>e</i>
41.	<i>c</i>
42.	<i>c</i>
43.	<i>c</i>
44.	<i>e</i>
45.	<i>b</i>
46.	<i>d</i>
47.	<i>e</i>
48.	<i>b</i>
49.	<i>d</i>
50.	<i>a</i>
51.	<i>a</i>
52.	<i>c</i>
53.	<i>e</i>
54.	<i>a</i>
55.	<i>a</i>
56.	<i>a</i>
57.	<i>a</i>
58.	<i>e</i>
59.	<i>c</i>
60.	<i>a</i>