

Capítulo

9

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE VARIABLES

I. Para la Suma:

$$\text{Sen}(x + y) = \text{Sen}x \cdot \text{Cos}y + \text{Sen}y \cdot \text{Cos}x$$

$$\text{Cos}(x + y) = \text{Cos}x \cdot \text{Cos}y - \text{Sen}x \cdot \text{Sen}y$$

$$\text{Tan}(x + y) = \frac{\text{Tan}x + \text{Tan}y}{1 - \text{Tan}x \cdot \text{Tan}y}$$

II. Para la Diferencia:

$$\text{Sen}(x - y) = \text{Sen}x \cdot \text{Cos}y - \text{Sen}y \cdot \text{Cos}x$$

$$\text{Cos}(x - y) = \text{Cos}x \cdot \text{Cos}y + \text{Sen}x \cdot \text{Sen}y$$

$$\text{Tan}(x - y) = \frac{\text{Tan}x - \text{Tan}y}{1 + \text{Tan}x \cdot \text{Tan}y}$$

PROPIEDADES:

I.

$$\text{Sen}(x + y) \cdot \text{Sen}(x - y) = \text{Sen}^2x - \text{Sen}^2y$$

$$\text{Cos}(x + y) \cdot \text{Cos}(x - y) = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2y$$

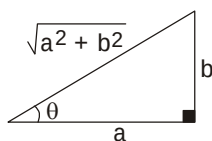
II.

$$\text{Tan}x \pm \text{Tan}y = \frac{\text{Sen}(x \pm y)}{\text{Cos}x \cdot \text{Cos}y}$$

III.

$$\text{Si: } K = a\text{Sen}x \pm b\text{Cos}x \quad \wedge \quad a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow K = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \text{Sen}(x \pm \theta) ; \text{ donde :}$$



IV.

Si:

$$L = a\text{Sen}x \pm b\text{Cos}x ; \forall a, b, x \in \mathbb{R}$$

$$L_{\text{máx}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$L_{\text{mín}} = -\sqrt{a^2 + b^2}$$

Donde:

$a \wedge b$: constantes

x : variables

v.

$$\tan x + \tan y + \tan x \cdot \tan y \cdot \tan(x + y) = \tan(x + y)$$

ó

$$\tan x - \tan y - \tan x \cdot \tan y \cdot \tan(x - y) = \tan(x - y)$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS PARA TRES ÁNGULOS

* **Propiedades:**

I.

Si:
 $x + y + z = \pi \text{ ó } n\pi \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow$
 i) $\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z$
 ii) $\cot x \cdot \cot y + \cot y \cdot \cot z + \cot z \cdot \cot x = 1$

II.

Si:
 $x + y + z = \frac{\pi}{2} \text{ ó } (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow$
 i) $\cot x + \cot y + \cot z = \cot x \cdot \cot y \cdot \cot z$
 ii) $\tan x \cdot \tan y + \tan y \cdot \tan z + \tan z \cdot \tan x = 1$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Reducir:

$$J = \text{Sen}(30^\circ + x) + \text{Sen}(30^\circ - x)$$

- a) $2\text{Sen}x$ b) $\text{Cos}x$ c) $2\text{Cos}x$
d) $\text{Sen}x$ e) $\sqrt{3}\text{Sen}x$

02. Reducir: $J = \text{Cos}(45^\circ + x) + \text{Cos}(45^\circ - x)$

- a) $\text{Cos}x$ b) $\text{Sen}x$ c) $\sqrt{2}\text{Cos}x$
d) $\sqrt{3}\text{Cos}x$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

03. Halle un valor agudo de "x" que verifique:

$$\text{Cos}4x \cdot \text{Cos}x - \text{Sen}4x \cdot \text{Sen}x = \frac{1}{2}$$

- a) 6° b) 12° c) 18°
d) 21° e) 24°

04. Halle un valor agudo de "x" para que cumpla:

$$\text{Sen}4x \cdot \text{Cos}x - \text{Sen}x \cdot \text{Cos}4x = 0,5$$

- a) 5° b) 10° c) 15°
d) 20° e) 30°

05. Si: $\text{Tgx} = 2 \wedge \text{Tgy} = 3$

Calcular: $\text{Tg}(x+y)$

- a) 1 b) -1 c) 2
d) -1/2 e) -2

06. Si: $\text{Tan}\alpha = \frac{1}{3}$; $\text{Tan}\beta = \frac{2}{5}$

Calcular: $\text{Tan}(\alpha - \beta)$

- a) $\frac{1}{7}$ b) $-\frac{1}{7}$ c) $\frac{1}{17}$
d) $-\frac{1}{17}$ e) $-\frac{1}{19}$

07. Hallar el valor de: $\text{Sen}7^\circ$

- a) $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$ b) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$ c) $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$
d) $\frac{3\sqrt{3}-4}{5}$ e) $\frac{3\sqrt{3}-4}{2}$

08. Calcular: $\text{Tg}8^\circ$

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{7}$
d) $\frac{1}{9}$ e) $\frac{1}{11}$

09. Si: $\text{Sen}x = \frac{3}{5}$ y $\text{Sen}z = \frac{24}{25}$

Calcular: $E = \text{Sen}(x+z)$; $x \wedge z$ son agudos.

a) $\frac{127}{225}$ b) $\frac{125}{117}$ c) $\frac{117}{222}$

d) $\frac{117}{125}$ e) $\frac{39}{25}$

10. Simplificar:

$$M = \frac{\text{Cos}(30^\circ - x) + \text{Cos}(30^\circ + x)}{\text{Sen}(30^\circ - x) + \text{Sen}(30^\circ + x)}$$

- a) 1 b) 2 c) $\sqrt{3}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $3\sqrt{3}$

11. Sabiendo que:

$$\text{Sen}(2x+y)\text{Cos}(x-y) + \text{Sen}(x-y)$$

$$\text{Cos}(2x+y) = \frac{4}{5}$$

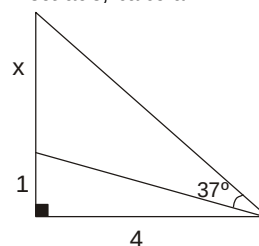
Calcular: $\text{Ctg}3x$

- a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{4}{5}$
d) $\frac{5}{4}$ e) $\frac{3}{5}$

12. Obtener: $\text{Sen}23^\circ$

- a) $\frac{\sqrt{3}}{10}$ b) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$ c) $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$
d) $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$ e) $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$

13. Del gráfico mostrado, calcular: "x".



- a) $\frac{17}{13}$ b) $\frac{13}{17}$ c) $\frac{51}{13}$
d) $\frac{13}{51}$ e) 3

14. Si: $\frac{2}{\text{Sen}x} = \frac{3}{\text{Cos}x}$

Calcular: $\text{Tg}(45^\circ - x)$

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{5}{3}$
d) 5 e) $\frac{3}{7}$

15. Hallar: $M = \sqrt{2}\text{Sen}(45^\circ - x)$

- a) $\text{Cos}x - \text{Sen}x$ b) $\text{Sen}x - \text{Cos}x$
 c) $\text{Cos}x + \text{Sen}x$ d) $2(\text{Cos}x - \text{Sen}x)$
 e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

16. Simplificar:

$$L = (\text{Sen}3x + \text{Cos}3x)(\text{Sen}2x + \text{Cos}2x) - \text{Sen}5x$$

- a) $\text{Cos}x$ b) $\text{Cos}2x$ c) $\text{Cos}3x$
 d) $\text{Cos}4x$ e) $\text{Cos}5x$

17. Reducir:

$$C = \text{Sen}50^\circ - 2\text{Sen}10^\circ \text{Cos}40^\circ$$

- a) $\text{Tan}40^\circ$ b) $\text{Tan}10^\circ$ c) $\text{Cot}10^\circ$
 d) $\text{Cot}45^\circ$ e) $\text{Sen}30^\circ$

18. Si:

$$5\text{Sen}(x - 37^\circ) = \sqrt{2}\text{Cos}(x + 45^\circ)$$

Hallar: $\text{Cot}x$

- a) $\text{Sen}37^\circ$ b) $\text{Cos}37^\circ$ c) $\text{Sec}37^\circ$
 d) $\text{Csc}37^\circ$ e) 1

19. Simplificar:

$$C = \frac{\text{Sen}(\alpha + \beta) - \text{Sen}\beta \text{Cos}\alpha}{\text{Cos}(\alpha + \beta) + \text{Sen}\alpha \text{Sen}\beta}$$

- a) $\text{Tan}\alpha$ b) $\text{Tan}\beta$ c) $\text{Cot}\alpha$
 d) $\text{Cot}\beta$ e) 1

20. Simplificar:

$$J = \frac{\text{Sen}40^\circ - \text{Sen}10^\circ \text{Cos}30^\circ}{\text{Cos}40^\circ + \text{Sen}30^\circ \text{Sen}10^\circ}$$

- a) $\sqrt{3}$ b) 1 c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 e) 2 e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

21. Siendo:

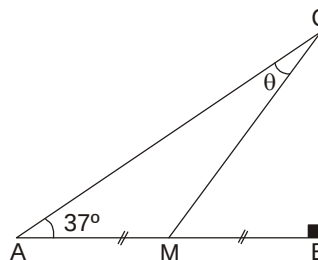
$$x + y = 30^\circ ; x - y = 37^\circ$$

Calcular:

$$J = (\text{Sen}x + \text{Cos}x)(\text{Sen}y + \text{Cos}y)$$

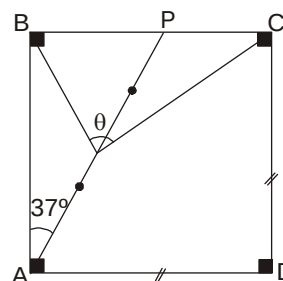
- a) 1,1 b) 1,2 c) 1,3
 d) 1,4 e) 1,5

22. Del gráfico, calcular: $\text{Tan}\theta$



- a) $\frac{3}{16}$ b) $\frac{6}{17}$ c) $\frac{7}{19}$
 d) $\frac{12}{17}$ e) $\frac{14}{19}$

23. Del gráfico, calcular: $\text{Tan}\theta$



- a) - 4 b) - 8 c) - 16
 d) - 9 e) 32

24. Siendo: $\alpha + \beta = 60^\circ$

Calcular:

$$C = (\text{Cos}\alpha + \text{Cos}\beta)^2 + (\text{Sen}\alpha - \text{Sen}\beta)^2$$

- a) $2 - \sqrt{3}$ b) $2(2 - \sqrt{3})$ c) $3(2 + \sqrt{3})$
 d) $2 + \sqrt{3}$ e) 3

25. Siendo:

$$x + y = 60^\circ ; \text{Tan}y = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Calcular :

$$M = (1 + \text{Tan}x \text{Tan}y) \text{Tan}(x - y)$$

- a) $\frac{\sqrt{3}}{28}$ b) $\frac{5\sqrt{3}}{28}$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{28}$
 d) $\frac{3\sqrt{3}}{14}$ e) $\frac{5\sqrt{3}}{14}$

26. Señale el valor máximo que toma la expresión:
 $C = (\text{Sen}3x + \text{Cos}3x)(\text{Sen}2x - \text{Cos}2x) + \text{Sen}x$

a) 1 b) 2^{-1} c) -1
 d) 4^{-1} e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$

27. Sabiendo que:

$$\text{Sen}x - 5\text{Cos}x = 0; 2\text{Sen}y + 3\text{Cos}y = 0$$

Donde: $x \in \text{IIIC}$; $y \in \text{IIC}$

Calcular:

$$L = \text{Sen}(x + y) + \text{Cos}(x - y)$$

a) $\frac{3}{13}\sqrt{2}$ b) $\frac{6}{13}\sqrt{2}$ c) $-\frac{6}{13}\sqrt{2}$
 d) $-\frac{3}{13}\sqrt{2}$ e) $-\frac{5}{13}\sqrt{2}$

28. Si: $\text{Tan}(a + b + c) = \frac{3}{5}$ y $\text{Tan}b = 3$

Calcular:

$$\text{Tan}(a - b + c)$$

a) $-\frac{6}{7}$ b) $\frac{21}{7}$ c) $\frac{27}{11}$
 d) $-\frac{29}{17}$ e) $-\frac{11}{27}$

29. Si: $A + B + C = 180^\circ$

El valor de:

$$E = \text{Tan}A + \text{Tan}B + \text{Tan}C - \text{Tan}A \text{Tan}B \text{Tan}C$$

a) 1 b) -1 c) 2
 d) 0 e) -2

30. Si x e y son ángulos complementarios ($x > 0^\circ$), encontrar el valor de "m" de modo que se verifique la identidad.

$$\frac{m}{1 + \text{Tg}\left(\frac{y}{2}\right)} = 1 + \text{Tan}\left(\frac{x}{2}\right)$$

a) 1 b) 2 c) $\text{Tan}\frac{x}{2}$
 d) $\text{Tan}\frac{y}{2}$ e) $\text{Tan}\frac{x}{2} \text{Tan}\frac{y}{2}$

31. Hallar $\text{Tan}A$ en un $\triangle ABC$, cuyos ángulos cumplen:
 $\text{Sen}A = n\text{Sen}B$ $\text{Sen}C$
 $\text{Cos}A = n\text{Cos}B$ $\text{Cos}C$

a) n b) n^2 c) $n - 1$
 d) $n^2 + 1$ e) $n + 1$

32. Simplificar:

$$P = \frac{\text{Tan}\theta + \frac{1}{\text{Ctg}(\phi - \theta)}}{1 - \frac{\text{Tan}\theta}{\text{Ctg}(\phi - \theta)}}$$

a) $\text{Tan}\theta - \text{Tan}\phi$ b) $\text{Tan}\theta + \text{Tan}\phi$
 c) $\text{Ctg}\phi$ d) $\text{Tan}\phi$
 e) $\text{Ctg}\theta$

33. Calcular el valor de:

$$\text{Tan}13^\circ + \text{Tan}32^\circ + \text{Tan}13^\circ \text{Tan}32^\circ$$

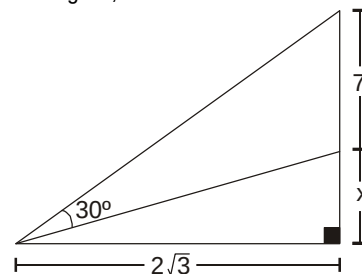
a) $2 + \sqrt{2}$ b) $1 + \sqrt{2}$
 c) $\frac{1 - \sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 e) 1

34. Simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\text{Tan}5a - \text{Tan}2a} - \frac{1}{\text{Ctg}5a - \text{Ctg}2a}$$

a) $\frac{\text{Cos}7a}{\text{Sen}3a}$ b) $\frac{\text{Cos}3a}{\text{Sen}7a}$ c) $\text{Ctg}7a$
 d) $\text{Ctg}3a$ e) $\frac{\text{Sen}3a}{\text{Sen}7a}$

35. A partir de la figura, hallar "x".



a) $\sqrt{3}$ b) 3 c) 4
 d) 6 e) 7

36. Calcular: $\text{Sen}75^\circ + \text{Cos}75^\circ$

a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$
 d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

37. Si: $\text{Tan}(x - y) = \frac{a - b}{a + b}$; $\text{Tan}(y - z) = 1$

Entonces: $\text{Tan}(x - z)$ es igual a:

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{b}{a}$ c) $\frac{a - b}{a + b}$

d) $\frac{a+b}{a-b}$ e) $\frac{a+b}{a}$

38. Los ángulos α , ϕ y θ satisfacen la relación:

$$\tan \alpha + \tan \phi + \tan \theta = \tan \alpha \tan \phi \tan \theta$$

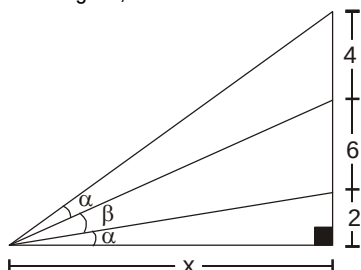
Hallar la suma de: $\alpha + \phi + \theta$

(K : Número entero)

a) 0 b) $2k\pi$ c) $\frac{\pi}{2} + k\pi$

d) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ e) $k\pi$

39. En la siguiente figura, la medida del lado x es:



a) $4\sqrt{6}$ b) $4\sqrt{23}$ c) $4\sqrt{13}$
d) $3\sqrt{17}$ e) $3\sqrt{6}$

40. Hallar el valor de:

$$(\cos x - \sin y) \cos \left(\frac{y-x}{2} \right)$$

Sabiendo que:

$$x = \frac{7\pi}{12} \text{ Rad}, \quad y = \frac{5\pi}{12} \text{ Rad}$$

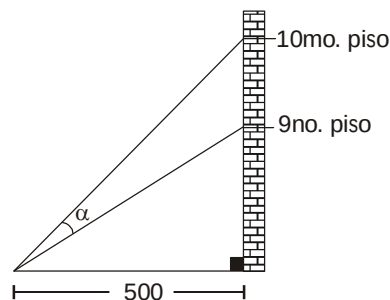
a) $-\frac{(2+\sqrt{6})}{2}$ b) $-\frac{(3+\sqrt{3})}{4}$
c) 0 d) $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$
e) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

41. El valor de la expresión:

$$(\tan 80^\circ - \tan 10^\circ) \cot 70^\circ \text{ es :}$$

a) 1 b) -1 c) 2
d) -2 e) 0

42. Nos situamos a una distancia de 500 metros de un edificio de 100m de altura, que tiene 25 pisos idénticos. Hallar el valor de la Tangente del ángulo α mostrado.



a) $\frac{5}{3143}$ b) $\frac{3143}{500}$ c) $\frac{1}{274}$

d) $\frac{25}{3143}$ e) $\frac{36}{3143}$

43. Si:

$$\sin(y + 2t) = \frac{4}{5}; \quad \sin y = \frac{x}{5};$$

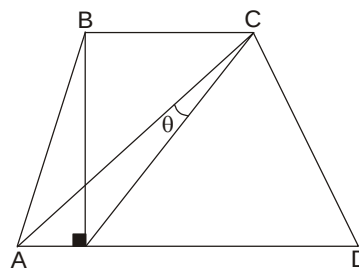
$$\frac{\pi}{2} < y + 2t < \pi$$

Expresar x en términos de $\sin 2t$ y $\cos 2t$ solamente:

a) $x = 4\cos 2t + 3\sin 2t$
b) $x = 3\cos 2t - 4\sin 2t$
c) $x = \cos 2t - \sin 2t$
d) $x = 2\sin 2t - 3\cos 2t$
e) $x = 2\cos 2t + 3\sin 2t$

44. En la figura mostrada, se tiene un trapecio isósceles en el que la longitud de la base menor es igual a la de su altura y la longitud de su base mayor es igual a la de su diagonal.

Hallar: $\tan \theta$



a) 2 b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{1}{7}$
d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{1}{3}$

45. Hallar el valor aproximado de:

$$D = \cos^2 4^\circ - \cos^2 86^\circ$$

a) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ b) $\frac{9\sqrt{2}}{10}$ c) $\frac{5\sqrt{2}}{10}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ e) $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

46. En un triángulo ABC, se cumple:

$$\text{Sen}C = \sqrt{2}\text{Sen}(A - B)$$

$$\text{Tan}B = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$$

Hallar el valor del ángulo BAC.

- a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{5\pi}{12}$ c) $\frac{\pi}{6}$
d) $\frac{3\pi}{10}$ e) $\frac{2\pi}{3}$

47. Si:

$$\text{Tan}\left(\frac{\pi}{14} - x\right) = \frac{1}{2}$$

Hallar:

$$\text{Ctg}\left(\frac{5\pi}{28} + x\right)$$

- a) 3 b) 2 c) 1
d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{3}$

48. Determinar el mayor valor de A y el menor valor de B tal que:

$$A \leq \text{Sen}x + 2\text{Cos}x \leq B$$

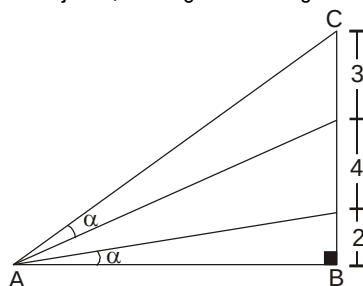
- a) -3 y 3 b) $-\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$
c) $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$ d) $-2\sqrt{5}$ y $2\sqrt{5}$
e) $-2\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$

49. En un triángulo rectángulo ABC recto en C, calcular el valor de M.

$$M = \left(1 + \text{Tan}\frac{A}{2}\right)\left(1 + \text{Tan}\frac{B}{2}\right)\left(1 + \text{Tan}\frac{C}{2}\right)$$

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

50. En la figura adjunta, la longitud del segmento AB es:



- a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{3}$
d) $5\sqrt{3}$ e) $6\sqrt{3}$

51. En la identidad trigonométrica:

$$2\text{Sen}x + 3\text{Cos}x = k\text{Cos}(x - \alpha)$$

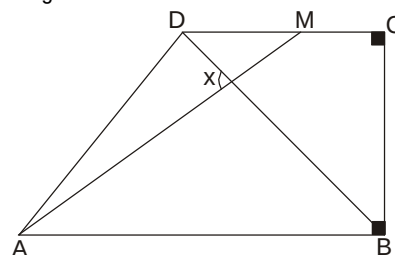
Determinar: $\text{Tan}\alpha$

- a) $\frac{2}{\sqrt{13}}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{\sqrt{13}}$
d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{\sqrt{13}}{3}$

52. En la siguiente figura:

$$\frac{\overline{MC}}{3} = \frac{\overline{CB}}{4} = \frac{\overline{AB}}{8} \quad \text{y} \quad \overline{MC} = \overline{MD}$$

Calcular: Tgx



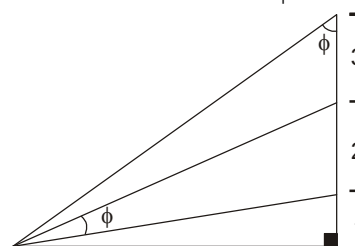
- a) $\frac{13}{4}$ b) $\frac{22}{7}$ c) $\frac{8}{3}$
d) $\frac{24}{5}$ e) $\frac{17}{9}$

53. Si: $\text{Sen}\alpha = 2\text{Sen}\beta$ y $\text{Cos}\beta = 3\text{Cos}\alpha$

Hallar el valor de: $\text{Cos}(\alpha - \beta)$

- a) $-\frac{5}{7}$ b) $-\frac{3}{7}$ c) $\frac{3}{7}$
d) $\frac{5}{7}$ e) $\frac{6}{7}$

54. En la figura mostrada, calcular: $\text{Tan}\phi$



- a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\frac{3}{2}$
d) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{1}{6}$

55. Si: $\beta - \alpha = 60^\circ$, el valor de la expresión:

$$A = (\text{Cos}\alpha - \text{Cos}\beta)^2 + (\text{Sen}\beta - \text{Sen}\alpha)^2 \text{ es}$$

- a) 2 b) $\frac{3}{4}$ c) 1
d) 0 e) $\frac{1}{2}$

56. Si:

$$\tan(x + 3y) = 5 \quad \text{y} \quad \tan(2y + x) = 4$$

Entonces el valor de $\text{Ctg } y$ es :

- a) 20 b) 21 c) 18
d) 14 e) 15

57. Si:

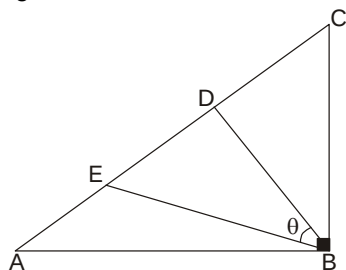
$$\tan(2a + b) = 8 \quad \text{y} \quad \tan(a + 2b) = 2$$

Entonces: $\tan(a - b)$ es:

- a) $\frac{12}{17}$ b) $\frac{4}{17}$ c) 6
d) $\frac{6}{17}$ e) 10

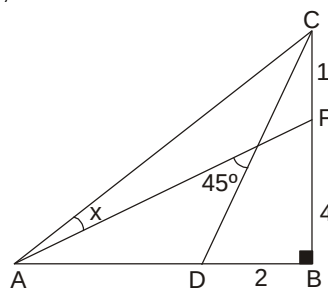
58. Del gráfico calcular el valor mínimo de: $\text{Cot } \theta$

$$\text{Si: } \frac{AE}{2} = \frac{ED}{3} = DC$$



- a) $\frac{\sqrt{10}}{6}$ b) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ c) $\frac{2\sqrt{10}}{3}$
d) $\frac{2\sqrt{10}}{9}$ e) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

59. Del gráfico, calcular: $\tan x$



- a) $\frac{17}{241}$ b) $\frac{21}{241}$ c) $\frac{23}{241}$
d) $\frac{17}{195}$ e) $\frac{21}{195}$

60. Siendo:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = m^2$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = m$$

¿Cuál es la variación de "m" para que se cumplan las 2 relaciones anteriores?

- a) $\left[\frac{-\sqrt{5}-1}{2} ; \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right]$
b) $\left[\frac{-\sqrt{5}+1}{2} ; \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right]$
c) $\left[\frac{-\sqrt{5}-1}{2} ; \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right]$
d) $\left[\frac{-\sqrt{5}+1}{2} ; \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right]$
e) $\left[\frac{-\sqrt{5}}{2} ; \frac{\sqrt{5}+2}{2} \right]$

Claves

01.	<i>b</i>
02.	<i>c</i>
03.	<i>b</i>
04.	<i>b</i>
05.	<i>b</i>
06.	<i>d</i>
07.	<i>a</i>
08.	<i>c</i>
09.	<i>d</i>
10.	<i>c</i>
11.	<i>a</i>
12.	<i>e</i>
13.	<i>c</i>
14.	<i>b</i>
15.	<i>a</i>
16.	<i>a</i>
17.	<i>e</i>
18.	<i>c</i>
19.	<i>a</i>
20.	<i>c</i>
21.	<i>c</i>
22.	<i>b</i>
23.	<i>e</i>
24.	<i>e</i>
25.	<i>b</i>
26.	<i>a</i>
27.	<i>d</i>
28.	<i>c</i>
29.	<i>d</i>
30.	<i>b</i>

31.	<i>e</i>
32.	<i>d</i>
33.	<i>e</i>
34.	<i>d</i>
35.	<i>b</i>
36.	<i>a</i>
37.	<i>a</i>
38.	<i>e</i>
39.	<i>a</i>
40.	<i>b</i>
41.	<i>c</i>
42.	<i>d</i>
43.	<i>a</i>
44.	<i>c</i>
45.	<i>a</i>
46.	<i>a</i>
47.	<i>a</i>
48.	<i>b</i>
49.	<i>e</i>
50.	<i>e</i>
51.	<i>b</i>
52.	<i>b</i>
53.	<i>d</i>
54.	<i>a</i>
55.	<i>c</i>
56.	<i>b</i>
57.	<i>d</i>
58.	<i>d</i>
59.	<i>b</i>
60.	<i>d</i>