

Capítulo 16

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

¿Qué es resolver un triángulo?

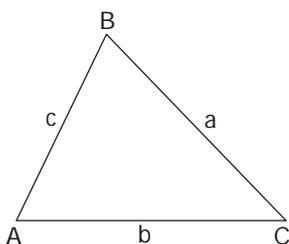
Dado el triángulo ABC, oblicuángulo; resolverlo significa determinar las medidas de sus elementos básicos; es decir, sus tres lados (a, b y c) y sus tres ángulos (A, B y C); a partir de ciertos datos que definan el triángulo.

¿Cómo resolver un triángulo?

Una vez que reconocemos los datos del triángulo y verificamos que se encuentra definido; para resolverlo, se utilizarán algunas propiedades geométricas, relaciones trigonométricas ya conocidas y otras propias del capítulo como las siguientes:

I. TEOREMA DE LOS SENOS :

"En todo triángulo, las medidas de sus lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos"



$$\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C}$$

De donde :

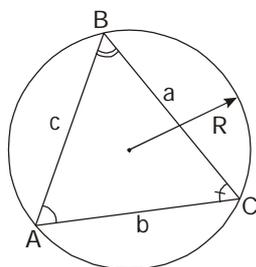
$$a\text{Sen}B = b\text{Sen}A$$

$$b\text{Sen}C = c\text{Sen}B$$

$$c\text{Sen}A = a\text{Sen}C$$

Corolario :

"En todo triángulo, las medidas de sus lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos; siendo la constante de proporcionalidad, el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo".



$$\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C} = 2R$$

R : Circunradio

De donde :

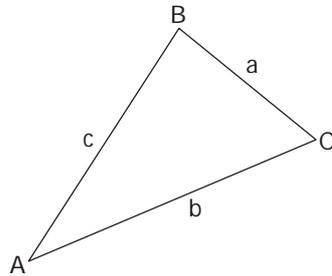
$$a = 2R\text{Sen}A$$

$$b = 2R\text{Sen}B$$

$$c = 2R\text{Sen}C$$

II. TEOREMA DE LOS COSENOS :

"En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble del producto de los mismos multiplicados por el Coseno del ángulo formado por ellos".



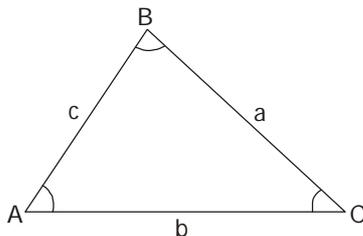
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

De donde podemos deducir fácilmente :

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$	$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$	$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$
--	--	--

III. TEOREMA DE LAS PROYECCIONES :

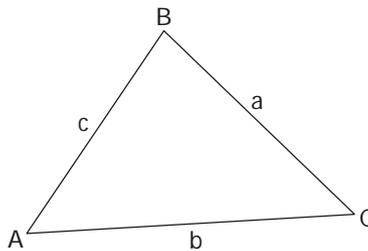
"En todo triángulo, la longitud de un lado es igual a la suma de los productos de cada una de las otras dos longitudes con el Coseno del ángulo que forman con el primer lado":



$a = b \cos C + c \cos B$
$b = a \cos C + c \cos A$
$c = a \cos B + b \cos A$

IV. TEOREMA DE LAS TANGENTES :

"En todo triángulo se cumple que la suma de longitudes de dos de sus lados, es a su diferencia; como la Tangente de la semisuma de los ángulos opuestos a dichos lados, es a la Tangente de la semidiferencia de los mismos ángulos".

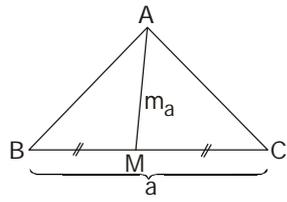


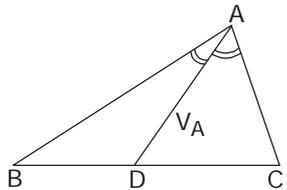
$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}$

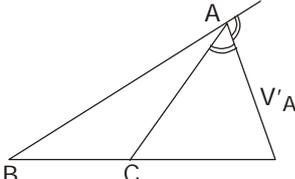
$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}$

$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan\left(\frac{C+A}{2}\right)}{\tan\left(\frac{C-A}{2}\right)}$

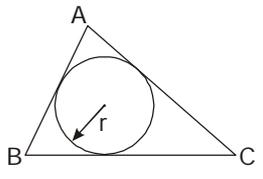
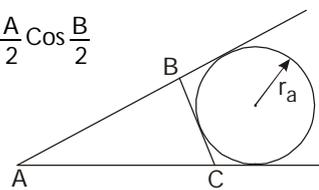
ALGUNAS LÍNEAS NOTABLES

m_a : Mediana relativa a "a" 	$4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$
	$4m_b^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos B$
	$4m_c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos C$

V_A : Bisectriz interior del "A" 	$V_A = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos \frac{A}{2}$
	$V_B = \frac{2ac}{a+c} \cdot \cos \frac{B}{2}$
	$V_C = \frac{2ab}{a+b} \cdot \cos \frac{C}{2}$

V'_A : Bisectriz exterior del " \hat{A} " 	$V'_A = \frac{2bc}{ b-c } \cdot \text{Sen} \frac{A}{2}$
	$V'_B = \frac{2ac}{ a-c } \cdot \text{Sen} \frac{B}{2}$
	$V'_C = \frac{2ab}{ a-b } \cdot \text{Sen} \frac{C}{2}$

RADIOS NOTABLES

r : inradio 	r_a : Exradio relativo al lado "a" 
$r = 4R \text{sen} \frac{A}{2} \text{sen} \frac{B}{2} \text{sen} \frac{C}{2}$	$r_a = 4R \text{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$
	$r_b = 4R \text{sen} \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}$
	$r_c = 4R \text{sen} \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. En un triángulo ABC: $\hat{A} = 30^\circ$; $\hat{B} = 135^\circ$ y $a = 2$.
Calcular : "c"

a) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

b) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

e) $\sqrt{3} - 1$

02. En un triángulo ABC : $a = 3$; $b = 2$
 $\hat{C} = 60^\circ$.
Calcular : "c"

a) $3\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{6}$

c) $\sqrt{6}$

d) $\sqrt{13}$

e) $\sqrt{7}$

03. En un triángulo ABC, se tiene que :

$$\frac{\text{Sen}A}{2} = \frac{\text{Sen}B}{3} = \frac{\text{Sen}C}{4}$$

Halle el valor de :

$$J = \frac{b^2 + c^2}{b^2 - a^2}$$

a) $\frac{25}{12}$

b) $\frac{25}{7}$

c) $\frac{13}{7}$

d) 5

e) $\frac{12}{5}$

04. En un triángulo ABC:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7}$$

¿Cuál es la medida de \hat{C} ?

a) 60°

b) 30°

c) 120°

d) 150°

e) 127°

05. En un triángulo ABC; simplificar :

$$J = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a^2 + b^2 - c^2}$$

a) $\text{Tan}A$

b) $\text{Cot}A$

c) $\text{Tan}B \cdot \text{Tan}C$

d) $\text{Tan}C \text{ Cot}B$

e) Tan^2A

06. En un triángulo ABC, se sabe que :

$$a^2 + c^2 - b^2 = \frac{1}{2}ac$$

Calcular : $\text{Cos} \frac{B}{2}$

a) $\sqrt{0,125}$

b) $\sqrt{0,625}$

c) 0,25

d) 0,125

e) 0,625

07. En un triángulo ABC, se cumple :

$$a\text{Cot}A = b\text{Cot}B = c\text{Cot}C$$

¿Qué tipo de triángulo es?

a) Isósceles.

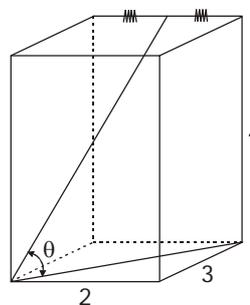
b) Equilátero.

c) Acutángulo.

d) Obtusángulo.

e) Rectángulo.

08. En el prisma rectangular mostrado, calcular: $\text{Sec}\theta$



a) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

b) $\frac{26\sqrt{2}}{15}$

c) $\frac{26\sqrt{2}}{29}$

d) $\frac{15\sqrt{2}}{13}$

e) $\frac{13\sqrt{2}}{11}$

09. En un triángulo ABC, reducir :

$$Q = \frac{a\cos B + b\cos A}{\sin C}$$

a) R

b) 2R

c) $\frac{R}{2}$

d) 4R

e) $\frac{R}{4}$

10. En un triángulo ABC, reducir :

$$Q = \frac{ab\cos C + bc\cos A + ca\cos B}{a^2 + b^2 + c^2}$$

a) 1

b) 2

c) $\frac{1}{2}$

d) 4

e) $\frac{1}{4}$

11. En un triángulo ABC, se cumple :

$$(a - c) \cos B = b (\cos C - \cos A)$$

¿Qué tipo de triángulo es?

a) Acutángulo.

b) Rectángulo.

c) Equilátero.

d) Obtusángulo.

e) Isósceles.

12. En un triángulo ABC, simplificar :

(p : Semiperímetro)

$$Q = \frac{a\sin B + b\sin A}{\sin A} + \frac{b\sin C + c\sin B}{\sin B} + \frac{c\sin A + a\sin C}{\sin C}$$

a) p

b) 2p

c) 3p

d) 4p

e) 8p

13. En un triángulo ABC, reduzca :

$$G = (a\cos C + c\cos A) \cos C + (a\cos B + b\cos A) \cos B$$

a) a

b) b

c) c

d) 0

e) a + b + c

14. En un triángulo ABC, reduzca la expresión

$$G = \frac{\sin A + \sin B}{\sin B + \sin C} + \frac{c - a}{b + c}$$

a) $\frac{1}{2}$

b) 1

c) a

d) b + c

e) $\frac{a}{c} + 1$

15. En un triángulo ABC, se tiene que :

$$2a = 7b \quad \wedge \quad m\angle C = 60^\circ$$

Halle el valor de :

$$\tan\left(\frac{A - B}{2}\right)$$

a) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$

c) $\frac{9\sqrt{3}}{5}$

d) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$

16. En un triángulo ABC, se cumple :

$$a^2 - \frac{3}{2}bc = b^2 + c^2$$

Halle : $\tan \frac{A}{2}$

- a) $\sqrt{7}$
- b) $\frac{\sqrt{7}}{7}$
- c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- e) $\sqrt{\frac{5}{7}}$

17. Si en un triángulo ABC; $\frac{a - b \cos C}{b - a \cos C} = 3$

Calcular : $G = \frac{\tan \frac{C}{2}}{\tan \left(\frac{A-B}{2} \right)}$

- a) 1
- b) 2
- c) 4
- d) $\frac{1}{2}$
- e) $\frac{1}{4}$

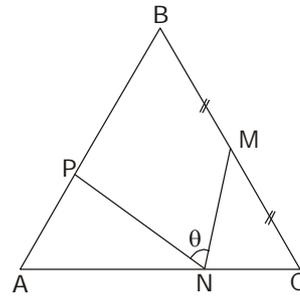
18. En un triángulo ABC :

$$a^2 + b^2 - c^2 = \frac{1}{2}ab$$

Calcular : $\tan \frac{C}{2}$

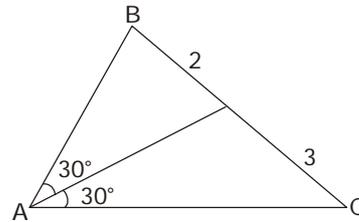
- a) $\sqrt{0,2}$
- b) $\sqrt{0,3}$
- c) $\sqrt{0,4}$
- d) $\sqrt{0,5}$
- e) $\sqrt{0,6}$

19. En el triángulo equilátero ABC; $BP = 5AP$ $AN = 2NC$.
Calcular : $\sec \theta$



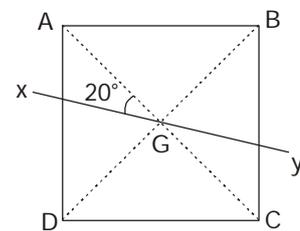
- a) $\sqrt{9}$
- b) $2\sqrt{91}$
- c) $-\sqrt{91}$
- d) $-2\sqrt{91}$
- e) $-2\sqrt{71}$

20. Dado el triángulo ABC, hallar el ángulo "B".



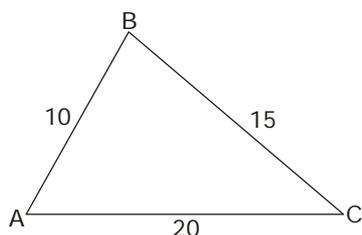
- a) $\text{ArcSen}3\sqrt{3}$
- b) $\text{ArcTan}\sqrt{3}$
- c) $\text{ArcTan}3$
- d) $\text{ArcSec}3\sqrt{3}$
- e) $\text{ArcTan}3\sqrt{3}$

21. En la figura, G es el centro del cuadrado ABCD. Hallar la suma de los cuadrados de las distancias de los vértices del cuadrado de la recta XY, si el lado del cuadrado es L.



- a) L^2
- b) $2L^2$
- c) $3L^2$
- d) $4L^2$
- e) $5L^2$

22. El producto $\text{Sen}2B \cdot \text{Sen}2C$ del triángulo ABC es igual a :



- a) $-\frac{105}{256}$
- b) $\frac{15}{18}$
- c) $\frac{86}{125}$
- d) $\frac{105}{256}$
- e) $-\frac{86}{125}$

23. Sea el triángulo ABC y sean a, b y c las longitudes de los lados opuestos a los vértices A, B y C, respectivamente.

Si se cumple la relación :

$$\frac{a}{\text{Cos}A} = \frac{b}{\text{Cos}B} = \frac{c}{\text{Cos}C}$$

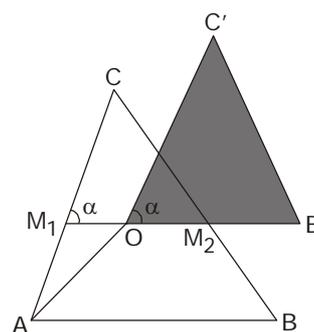
Entonces el triángulo ABC es :

- a) Acutángulo.
 - b) Obtusángulo.
 - c) Isósceles.
 - d) Equilátero.
 - e) Rectángulo.
24. Las diagonales de un paralelogramo miden "a" y "b", forman un ángulo agudo C. El área del paralelogramo es :

- a) $ab\text{Sen}C$
- b) $ab\text{Cos}C$
- c) $\frac{1}{2}ab\text{Csc}C$
- d) $\frac{1}{2}ab\text{Sen}C$
- e) $\frac{1}{2}ab\text{Cos}C$

25. Hallar el área del triángulo $OB'C'$, si $AB=4=BC$,

$M_1O = \frac{AB}{4}$, $AC=6$. M_1 y M_2 puntos medios en \overline{AC} y \overline{BC} respectivamente $\overline{AC} \parallel \overline{OC'}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ $AO=OC'$.



- a) $\left(\frac{29}{3}\right)\sqrt{7}$
- b) $\left(\frac{29}{6}\right)\sqrt{7}$
- c) $\left(\frac{29}{7}\right)\sqrt{7}$
- d) $\left(\frac{29}{2}\right)\sqrt{7}$
- e) $\left(\frac{29}{24}\right)\sqrt{7}$

26. Si en un triángulo, donde a, b, c son los lados opuestos a los ángulos A, B, C se cumple que :

$$B - C = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad b + c = a\sqrt{2}$$

Entonces : $\frac{B-A}{2}$ es igual a :

- a) $\frac{\pi}{8}$
- b) $\frac{\pi}{4}$
- c) $\frac{\pi}{2}$
- d) 0
- e) $\frac{\pi}{3}$

27. En un triángulo ABC, el ángulo C mide 60° y los lados $a = 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$ y $b = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Entonces, la medida del ángulo A es :

- a) $\frac{2\pi}{3} + \text{ArcTan}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- b) $\frac{\pi}{3} + \text{ArcTan}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $\frac{\pi}{3} + 2\text{ArcTan}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

d) $\frac{2\pi}{3} - \text{ArcTan}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

e) $\frac{\pi}{4} + \text{ArcTan}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

28. En un triángulo ABC, se cumple :

$$\text{Sen}C = \sqrt{2}\text{Sen}(A - B)$$

$$\text{Tan}B = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$$

Hallar el valor del ángulo BAC.

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{6}$

c) $\frac{2\pi}{3}$

d) $\frac{5\pi}{12}$

e) $\frac{3\pi}{10}$

29. En un triángulo ABC, se cumple que :

$$m\angle B - m\angle C = 90^\circ ; b + c = a\sqrt{2}$$

Hallar la medida del ángulo B.

a) 110°

b) 105°

c) 127°

d) 120°

e) 125°

30. Sea el triángulo ABC de lados $AB = AC$ y $BC = \sqrt{2}$. Si la bisectriz del ángulo B corta al lado opuesto en D y $BD = 1$.

Entonces, los ángulos A y B son:

a) $60^\circ ; 60^\circ$

b) $90^\circ ; 45^\circ$

c) $100^\circ ; 40^\circ$

d) $120^\circ ; 30^\circ$

e) $150^\circ ; 15^\circ$

31. En un triángulo ABC, $C = 60^\circ$ y $a = 3b$.

Determinar el valor de $E = \text{Tan}(A - B)$

a) $4\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{3}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\sqrt{3}$

e) 1

32. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide "c" unidades y la longitud de la bisectriz de uno de los ángulos agudos es $\frac{c\sqrt{3}}{3}$ unidades.

Hallar el área de la región delimitada por el triángulo rectángulo dado.

a) $\frac{c^2\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{c^2\sqrt{3}}{8}$

c) $\frac{c^2\sqrt{3}}{6}$

d) $\frac{3c^2}{6}$

e) $\frac{3c^2}{2}$

33. En un triángulo ABC con lados a, b y c, respectivamente; se tiene : $\text{Tan}\frac{A}{2} = 1$ y $\text{Tan}\frac{B}{2} = \frac{3}{4}$.

Determinar : $\frac{a+b}{a-b}$

a) 50

b) 16

c) 49

d) 9

e) 25

34. Una diagonal de un paralelepípedo rectángulo forma con las tres aristas concurrentes a un mismo vértice los ángulos α , β y θ . El valor de :

$$\text{Sen}^2\alpha + \text{Sen}^2\beta + \text{Sen}^2\theta \text{ es :}$$

a) $\frac{3}{2}$

b) 2

c) $\frac{5}{2}$

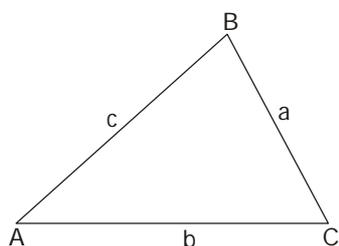
d) 3

e) 4

35. En la figura, se muestra un triángulo en el que se cumple:

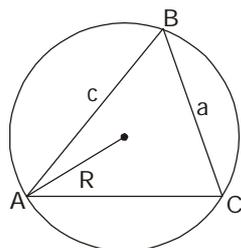
$$\cos A + \cos B = 4 \operatorname{Sen}^2 \frac{C}{2}$$

Luego el valor de $a + b$ es :



- a) $3c$ b) $\frac{3c}{2}$ c) $2c$
 d) $\frac{5}{3}c$ e) $\frac{5}{2}c$

36. En la figura mostrada, el triángulo ABC está inscrito en una circunferencia de radio R. Si se cumple que : $c^2 - a^2 = 2R^2$ y la medida del ángulo B es 30° , los valores de los ángulos A y C son respectivamente:



- a) 45° y 105°
 b) 35° y 115°
 c) 60° y 90°
 d) 30° y 120°
 e) 25° y 125°

37. Dos circunferencias de radios $2u$ y $3u$, tienen sus centros separados una distancia igual a $4u$. El Coseno del ángulo agudo que forman las tangentes a ambas circunferencias en un punto de corte, es igual a :

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
 d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{4}$

38. En un triángulo ABC, se cumple :

$$a^3(b^2 + c^2) + b^3(a^2 + c^2) - (a^5 + b^5) = 2abcR^2$$

Donde :

R : Circunradio del triángulo ABC

Calcule :

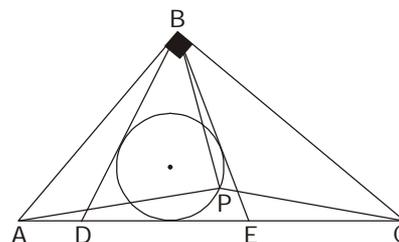
$$P = \operatorname{Sen}A \operatorname{Sen}2A + \operatorname{Sen}B \operatorname{Sen}2B$$

- a) 1 b) 2 c) $\frac{3}{4}$
 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{2}$

39. Del gráfico, ABC es un triángulo isósceles recto en "B" y DBE es un triángulo equilátero.

Si : $AC = 6$

Calcular : $AP^2 + BP^2 + CP^2$



- a) 18 b) 19 c) 9
 d) 81 e) 27

40. En un triángulo ABC :

$$\frac{a+c}{a-c} = 4 \operatorname{Tan} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{Cot} \left(\frac{A-C}{2} \right)$$

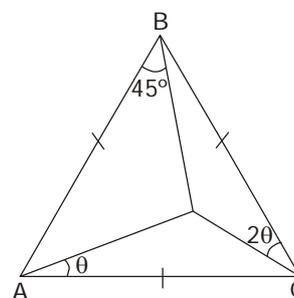
Calcular :

$$\frac{\operatorname{Tan}A + \operatorname{Tan}B + \operatorname{Tan}C}{\operatorname{Tan}A \cdot \operatorname{Tan}C}$$

- a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{7}{6}$
 d) $\frac{6}{7}$ e) $\frac{2}{5}$

41. En el triángulo equilátero mostrado, calcular :

$$J = \cos(15^\circ + 3\theta) \operatorname{Sec}\theta$$



- a) $\frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{2}}$
- b) $\sqrt{3}+1$
- c) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$
- d) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$
- e) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$

42. Si en un triángulo ABC :

$$\frac{c-b\cos A}{b-c\cos A} = \frac{3}{5}$$

Calcular :

$$L = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\frac{A}{2}}$$

- a) $\frac{2}{5}$
- b) $\frac{3}{7}$
- c) $\frac{4}{7}$
- d) $\frac{3}{5}$
- e) $\frac{1}{4}$

43. En un triángulo ABC :

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -n$$

Las distancias del ortocentro a los lados del triángulo son x ; y ; z.

Hallar : $J = \sqrt{xyz}$, si el circunradio mide $\sqrt{2}$

- a) $2n - 1$
- b) $2(n - 1)$
- c) $2(1 - n)$
- d) $n - 1$
- e) $\sqrt[4]{2}(n-1)$

44. Los lados de un cuadrilátero son $a = 7$; $b = 8$; $c = 9$; $d = 11$.

Si su superficie es $S = 33$, calcular la tangente del ángulo agudo formado por las diagonales.

- a) 2 b) 2,3 c) 2,4
- d) 1,8 e) 1,6

45. Dado un cuadrilátero ABCD, determine el valor de la expresión.

$$E = \frac{bc\cos^2\left(\frac{C}{2}\right) - ad\cos^2\left(\frac{A}{2}\right)}{(b+c)^2 - (a+d)^2}$$

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{1}{3}$
- d) 0 e) $\frac{1}{6}$

46. Siendo A, B y C los ángulos internos de un triángulo, para el cual se cumple :

$$2\text{Sen}B - \text{Sen}A = \text{Sen}(A+B+C) + \text{Sen}C$$

Calcule el valor de :

$$A = \frac{\cot\left(\frac{A}{2}\right)\cot\left(\frac{C}{2}\right) - 1}{\cot\left(\frac{A}{2}\right)\cot\left(\frac{C}{2}\right) + 1}$$

- a) - 1 b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$
- d) 1 e) 2

47. En un triángulo acutángulo ABC, la circunferencia descrita tomando como diámetro la altura relativa al lado a, intercepta a los lados b y c, en los puntos P y Q respectivamente.

Expresé el segmento PQ en función de los ángulos del triángulo y del radio R de la circunferencia circunscrita al triángulo.

- a) $2R\text{Sen}A \text{ Sen}B \text{ Sen}C$
- b) $R \text{ Sen}A \text{ Sen}B \text{ Sen}C$
- c) $R \text{ Cos}A \text{ Cos}B \text{ Cos}C$
- d) $3R \text{ Cos}A \text{ Cos}B \text{ Cos}C$
- e) $R \text{ Tan}A \text{ Tan}B \text{ Tan}C$

48. En un triángulo ABC, reducir :

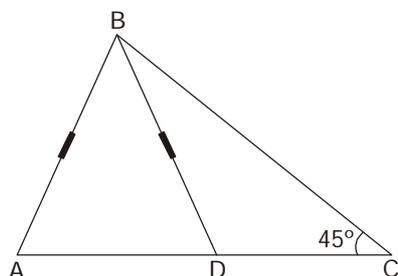
$$P = \frac{a^2\text{Sen}(B-C)}{\text{Sen}B + \text{Sen}C} + \frac{b^2\text{Sen}(C-A)}{\text{Sen}C + \text{Sen}A} + \frac{c^2\text{Sen}(A-B)}{\text{Sen}A + \text{Sen}B}$$

- a) $\text{Sen}A \text{ Sen}B \text{ Sen}C$
- b) $\text{Cos}A \text{ Cos}B \text{ Cos}C$
- c) $\text{Sen}(A + B + C)$
- d) $\text{Cos}(A + B + C)$
- e) $2\text{Cos}(A + B + C)$

49. En el triángulo ABC, se tiene : $AB = 2$, $AC = \sqrt{6}$

Calcular : $\frac{V'_b}{V_b}$

Donde : (V'_b y V_b son bisectrices exterior e interior respectivamente, relativo al lado b)



- a) $2 + \sqrt{3}$
- b) $1 + \sqrt{3}$
- c) $2 - \sqrt{3}$
- d) $\sqrt{3} - 1$
- e) $\sqrt{2}$

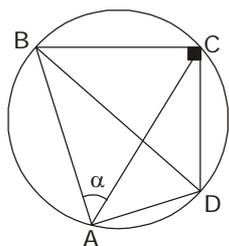
50. Dado un triángulo ABC, si : $m\angle C = 30^\circ$ y $\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$

Calcular : $\frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{A})$

- a) 30°
- b) $\pi - \text{ArcTan}\left(\frac{\pi}{3}\right)$
- c) $\pi - \text{ArcTan}\left(\frac{3}{7}(\sqrt{3} + 2)\right)$
- d) $\pi - \text{ArcTan}\left(\frac{3}{7}(2 - \sqrt{3})\right)$
- e) $-\text{ArcTan}\left(\frac{3}{7}(2 + \sqrt{3})\right)$

51. En el cuadrilátero ABCD de la siguiente figura, calcular:

$\text{Sen}\alpha + 2\text{Cos}\alpha$
 Si : $2AD = AB = 3AC$



- a) $\frac{1}{7}$
- b) $\frac{3}{4}$
- c) $\frac{3}{2}$

- d) $\frac{2}{3}$
- e) $\frac{1}{3}$

52. Los ángulos de un cuadrilátero ABCD están en progresión geométrica de razón 3.

Calcular :
 $P = \text{Cos}A \text{Cos}B + \text{Cos}B \text{Cos}C + \text{Cos}C \text{Cos}D + \text{CosD CosA}$

- a) 1
- b) $\frac{1}{2}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $\frac{\sqrt{5}}{4}$
- e) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

53. En un triángulo ABC, se cumple que :

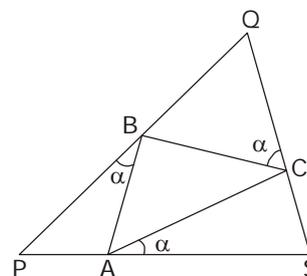
$\text{Cos}A = \frac{a+c}{2b}$; $\text{Cos}B = \frac{a+b}{2c}$

Calcular :
 $\text{Tan}A + \text{Tan}B + \text{Tan}C$

- a) $-\sqrt{7}$
- b) $2\sqrt{3}$
- c) $\sqrt{13}$
- d) $\sqrt{11}$
- e) $2\sqrt{5}$

54. En la figura R₁, R₂ y R₃ son los radios de las circunferencias circunscritas a los triángulos ABC, ABP, BCQ y ACS respectivamente. Hallar "R".

$R_1 = 1$; $R_2 = 2$; $R_3 = 4$



- a) $\sqrt{2}$
- b) 1
- c) $\sqrt{3}$
- d) 2
- e) 4

55. Los lados de un triángulo oblicuángulo ABC, miden :

$b = (\text{Sen}A + \text{Cos}A)u$
 $c = (\text{Sen}A - \text{Cos}A)u$

Además : $a = \frac{\sqrt{6}}{2}u$

Hallar la medida del mayor valor de A.

- a) 60°
- b) 72°
- c) 54°
- d) 65°
- e) 45°

56. En un triángulo ABC, reducir :

$$M = \frac{(c - b\cos A)(a - c\cos B)(b - a\cos C)}{\operatorname{Sen}2A\operatorname{Sen}2B\operatorname{Sen}2C}$$

- a) R b) $8R^3$ c) $4R^3$
 d) R^3 e) $6R^2$

57. En un triángulo ABC, se cumple que :

$$\operatorname{Sen}2A + \operatorname{Sen}2B = \sqrt{3}\operatorname{Cos}(A - B)$$

$$\operatorname{Tan}\left(\frac{A+B}{2}\right) = 3\operatorname{Tan}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Hallar la medida del ángulo "B"

- a) 30°
 b) $\operatorname{ArcTan}\frac{\sqrt{3}}{5}$
 c) $\operatorname{ArcTan}\frac{\sqrt{3}}{2}$
 d) a o b
 e) a o c

58. En un triángulo ABC, se cumple que :

$$\operatorname{Cot}A + \operatorname{Cot}C = 2\operatorname{Cot}B$$

Luego se cumple que :

- a) $a + c = 2b$
 b) $2b^2 = ac$
 c) $a^2 + c^2 = 2b^2$
 d) $b^2 = a \times c$
 e) $4b^2 = a^2 + c^2$

59. Siendo ABC un triángulo de lados a, b y c, entonces respecto a "K" podemos afirmar que :

$$K = \left[\frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} \right] + \left[\frac{a - c\cos B}{a - b\cos C} \right]$$

- a) $K = 1$ b) $K = 2$ c) $K = 4$
 d) $K \geq 2$ e) $K \geq 4$

60. En un cuadrilátero inscriptible ABCD, de lados $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ y $AD = d$.

Calcular : $R = \frac{\operatorname{Sen}A}{\operatorname{Sen}B}$

- a) $\frac{ab + cd}{ad + bd}$
 b) $\frac{ab + cd}{ac + bd}$
 c) $\frac{ab + cd}{ad + bc}$
 d) $\frac{ac + bd}{ab + cd}$
 e) $\frac{a + b + c + d}{abcd}$

Claves

01.	<i>a</i>
02.	<i>e</i>
03.	<i>d</i>
04.	<i>c</i>
05.	<i>d</i>
06.	<i>b</i>
07.	<i>b</i>
08.	<i>e</i>
09.	<i>b</i>
10.	<i>c</i>
11.	<i>e</i>
12.	<i>d</i>
13.	<i>a</i>
14.	<i>b</i>
15.	<i>b</i>
16.	<i>a</i>
17.	<i>b</i>
18.	<i>e</i>
19.	<i>b</i>
20.	<i>e</i>
21.	<i>a</i>
22.	<i>a</i>
23.	<i>d</i>
24.	<i>d</i>
25.	<i>e</i>
26.	<i>a</i>
27.	<i>b</i>
28.	<i>a</i>
29.	<i>b</i>
30.	<i>d</i>

31.	<i>a</i>
32.	<i>b</i>
33.	<i>c</i>
34.	<i>b</i>
35.	<i>c</i>
36.	<i>d</i>
37.	<i>e</i>
38.	<i>d</i>
39.	<i>e</i>
40.	<i>b</i>
41.	<i>d</i>
42.	<i>e</i>
43.	<i>e</i>
44.	<i>c</i>
45.	<i>a</i>
46.	<i>c</i>
47.	<i>a</i>
48.	<i>c</i>
49.	<i>a</i>
50.	<i>c</i>
51.	<i>d</i>
52.	<i>b</i>
53.	<i>a</i>
54.	<i>d</i>
55.	<i>b</i>
56.	<i>d</i>
57.	<i>d</i>
58.	<i>c</i>
59.	<i>d</i>
60.	<i>c</i>

ÍNDICE

TRIGONOMETRÍA

Primer Bimestre

Pág.

Capítulo 01	
Razones Trigonómicas de un ángulo agudo I	9
Capítulo 02	
Razones Trigonómicas de un ángulo agudo II	19
Capítulo 03	
Ángulos Verticales - Ángulos Horizontales	31
Capítulo 04	
Sistema Coordinado Rectangular	41
Capítulo 05	
Razones Trigonómicas de un ángulo en posición normal	51
Capítulo 06	
Reducción al primer cuadrante	61
Capítulo 07	
Circunferencia Trigonómica	71

Segundo Bimestre

Capítulo 08	
Identidades Trigonómicas de una variable	83
Capítulo 09	
Identidades Trigonómicas de la suma y diferencia de variables	91

Tercer Bimestre

Capítulo 10		
Identidades Trigonómicas de la variable doble		101
Capítulo 11		
Identidades Trigonómicas de la variable triple		111
Capítulo 12		
Transformaciones Trigonómicas		119
Capítulo 13		
Funciones trigonométricas reales de variable real		127

Cuarto Bimestre

Capítulo 14		
Funciones trigonométricas inversas		141
Capítulo 15		
Ecuaciones e inecuaciones trigonométricas		153
Capítulo 16		
Resolución de Triángulos Oblicuángulos		165