

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS REALES DE VARIABLE REAL

INTRODUCCIÓN

Dentro del análisis matemático, el concepto de función es materia de un largo estudio debido a su flexibilidad para representar vía modelos matemáticos una cierta realidad que se desea investigar, ya sea para prevenir u optimizar.

En ese contexto las funciones trigonométricas, debido a sus características de periodicidad, juegan un rol importante en la representación de fenómenos periódicos, como las transmisiones radiales por ejemplo; por ello su estudio es imprescindible.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

$$F.T. = \{(x; y) / y = R.T.(x) ; x \in D(F.T.)\}$$

Por ejemplo :

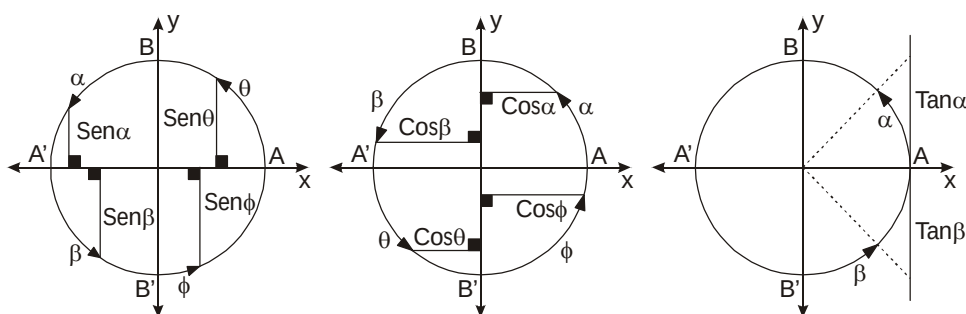
$$F.T.(Tangente) = \{(x; y) / y = \text{Tan} x ; x \in D(\text{Tan})\}$$

Si queremos algunos pares ordenados :

$$F.T.(Tangente) = \left\{ (0; 0) , \left(\frac{\pi}{4}; 1 \right) , \left(\frac{\pi}{3}; \sqrt{3} \right) , \left(\frac{2\pi}{3}; -\sqrt{3} \right) , \dots \right\}$$

CONSIDERACIÓN I :

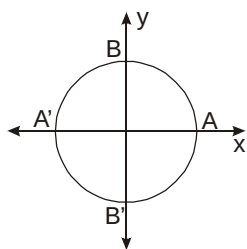
Para el análisis de cada una de las funciones trigonométricas, tendremos que recordar las representaciones, en la circunferencia trigonométrica, de las Razones Trigonómicas, así como algunas propiedades adicionales.



Cuadro de Variaciones I

θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
$\text{Sen}\theta$	$0 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$
$\text{Cos}\theta$	$1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 1$
$\text{Tan}\theta$	$0 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 0$

Además, no olvide que en la C.T. mostrada, los arcos con extremo en :



A es de la forma : $2n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

B es de la forma : $(4n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

A' es de la forma : $(2n+1)\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

B' es de la forma : $(4n+3)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

Pero si debido a alguna condición; puede estar ubicado en :

A o A' ; es de la forma : $n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

B o B' ; es de la forma : $(2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

A, A' ; B o B' ; es de la forma : $\frac{n\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

Por ejemplo : si nos pidiesen hallar " α " que cumple :

$\text{Sen}\alpha = 0 \Rightarrow$ " α " tiene su extremo en A o A' $\therefore \alpha = n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

$\text{Sen}\alpha = 1 \Rightarrow$ " α " tiene su extremo en B $\therefore \alpha = (4n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

$\text{Cos}\alpha = 0 \Rightarrow$ " α " tiene su extremo en B o B' $\therefore \alpha = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

$\text{Cos}\alpha = -1 \Rightarrow$ " α " tiene su extremo en A' $\therefore \alpha = (2n+1)\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

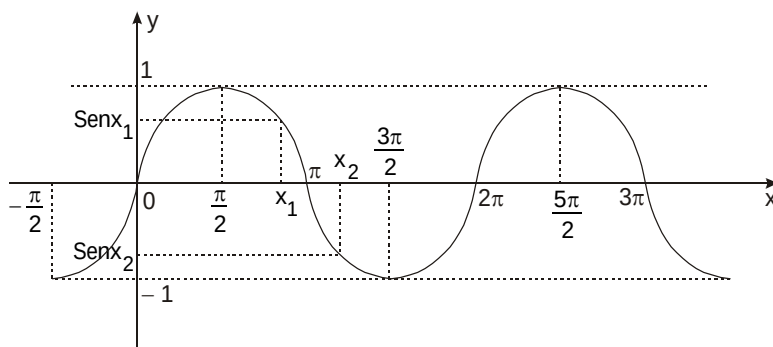
$\text{Sen}2\alpha = 0 \Rightarrow$ " 2α " tiene su extremo en A o A' $\therefore 2\alpha = n\pi$; $\alpha = \frac{n\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$

ANÁLISIS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

I. FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA SEÑO

$$F.T.(\text{Sen}) = \{(x; y) / y = \text{Sen}x \text{ ; } x \in D(\text{Sen})\}$$

Por lo visto en la representación y de acuerdo al cuadro de variaciones, tenemos :



Gráfica que recibe el nombre de **sinusoide**; desde el cual podemos afirmar :

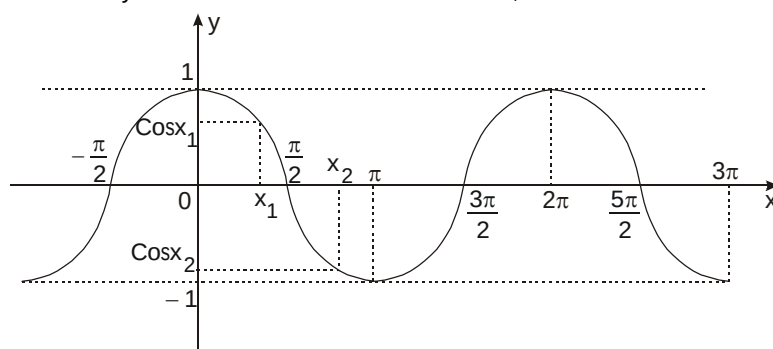
- * $D(\text{Sen}) = \mathbb{R}$
- * $R(\text{Sen}) = [-1; 1] \Rightarrow -1 \leq \text{Sen}x \leq 1$

$\nearrow$ mín
 $\searrow$ máx
- * Es una función continua en $\mathbb{R}$.
- * Es una función creciente y decreciente.
- * Es una función periódica : $T = 2\pi$ (periodo principal)
- * Es una función impar : $\text{Sen}(-x) = -\text{Sen}x$
- * No es inyectiva.

II. FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA COSENO

$$F.T.(\text{Cos}) = \{(x; y) / y = \text{Cos}x \ ; \ x \in D(\text{Cos})\}$$

Por lo visto en la representación y de acuerdo al cuadro de variaciones, tenemos :



Gráfica que recibe el nombre de **cosinusoides**; desde el cual podemos afirmar :

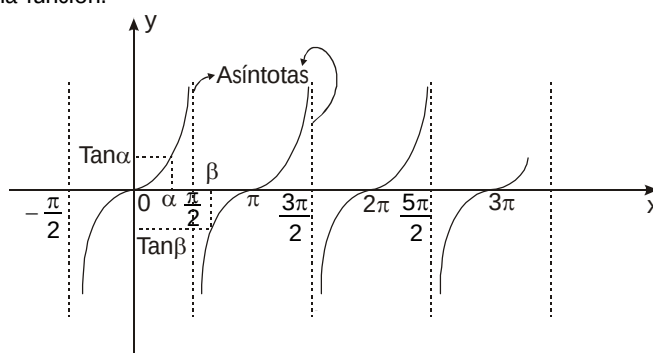
- * $D(\text{Cos}) = \mathbb{R}$
- * $R(\text{Cos}) = [-1; 1] \Rightarrow -1 \leq \text{Cos}x \leq 1$

$\nearrow$ mín
 $\searrow$ máx
- * Es una función continua en $\mathbb{R}$.
- * Es una función creciente y decreciente.
- * Es una función par : $\text{Cos}(-x) = \text{Cos}x$
- * Es una función periódica : $T = 2\pi$ (periodo principal)
- * No es inyectiva.

III. FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA TANGENTE

$$F.T.(\text{Tan}) = \{(x; y) / y = \text{Tan}x \ ; \ x \in D(\text{Tan})\}$$

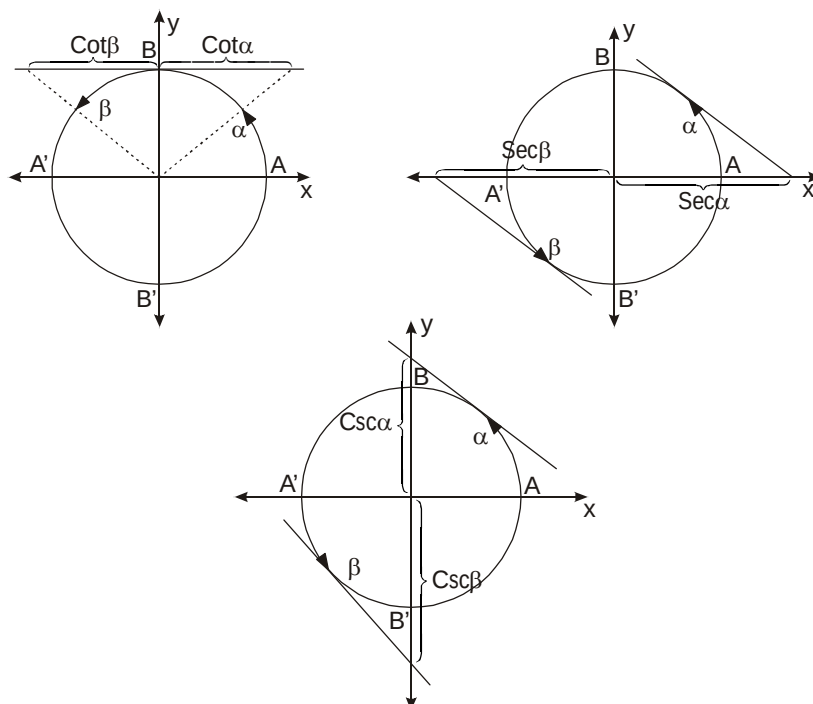
De acuerdo a la representación en la C.T. y el cuadro de variaciones; y con el detalle adicional que la tangente no se define para todo arco cuyo extremo coincide con B o B', (en la C.T.), es decir, los arcos de la forma $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ no pertenecen al dominio de la función.



A la curva se le va a denominar **tangente**; y de allí podremos afirmar :

- * $D(\text{Tan}) = \mathbb{R} - \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} ; n \in \mathbb{Z} \right\}$
- * $R(\text{Tan}) = \mathbb{R} \Rightarrow -\infty < \text{Tan}x < +\infty$
- * No se define en $(2n+1)\frac{\pi}{2} ; n \in \mathbb{Z}$
- * Es una función creciente en cada cuadrante.
- * Es una función impar : $\text{Tan}(-x) = -\text{Tan}x$
- * Es una función periódica : $T = \pi$ (período principal)
- * No es inyectiva.

CONSIDERACIÓN II :



Nótese de los gráficos, aparte de las representaciones de las R.T.; que la cotangente, secante y cosecante no se definen respectivamente, para arcos cuyo extremo coincide con :

$$A \text{ y } A' \Rightarrow n\pi ; n \in \mathbb{Z}$$

$$B \text{ y } B' \Rightarrow (2n+1)\frac{\pi}{2} ; n \in \mathbb{Z}$$

$$A \text{ y } A' \Rightarrow n\pi ; n \in \mathbb{Z}$$

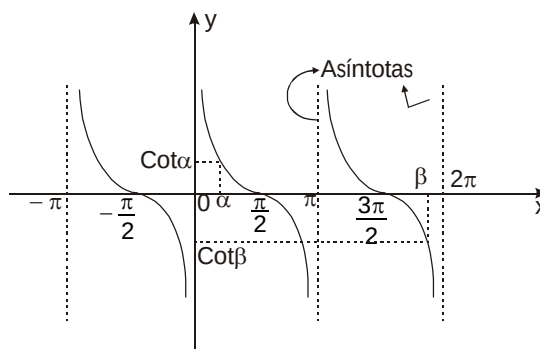
Cuadro de variaciones II :

θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
$\text{Cot}\theta$	$+\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -\infty$
$\text{Sec}\theta$	$1 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 1$
$\text{Csc}\theta$	$+\infty \rightarrow 1$	$1 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow -\infty$

IV. FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA COTANGENTE

$$F.T.(\text{Cot}) = \{(x ; y) / y = \text{Cot}x ; x \in D(\text{Cot})\}$$

De acuerdo a lo visto en la representación y en el cuadro de variaciones, tendremos :



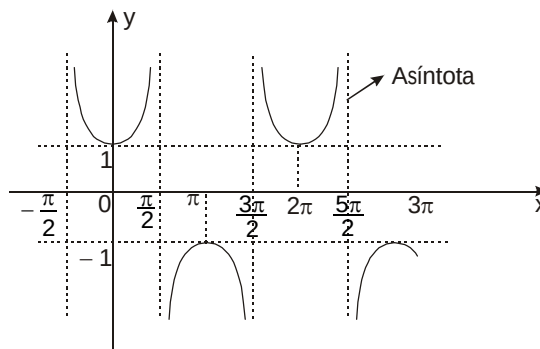
Curva que recibe el nombre de **cotangente**; de donde podemos afirmar :

- * $D(\text{Cot}) = \mathbb{R} - \{n\pi ; n \in \mathbb{Z}\}$
- * $R(\text{Cot}) = \mathbb{R} \Rightarrow -\infty < \text{Cot}x < +\infty$
- * No se define en $n\pi ; n \in \mathbb{Z}$
- * Es una función decreciente en cada cuadrante.
- * Es una función impar : $\text{Cot}(-x) = -\text{Cot}x$
- * Es una función periódica : $T = \pi$ (periodo principal)
- * No es inyectiva.

V. FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA SECANTE

$$F.T.(\text{Sec}) = \{(x; y) / y = \text{Sec}x ; x \in D(\text{Sec})\}$$

Según la representación y variación, tendremos :

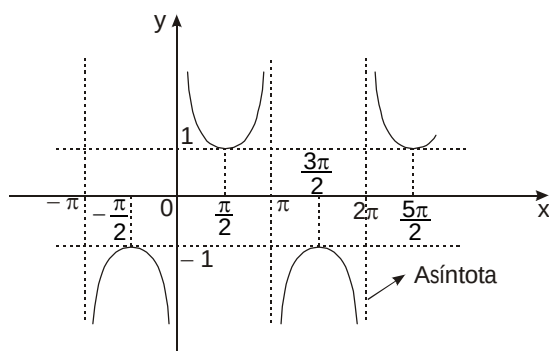


Curva denominada **secante**, de donde afirmamos :

- * $D(\text{Sec}) = \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} ; n \in \mathbb{Z}\right\}$
- * $R(\text{Sec}) = (-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty) \Rightarrow \text{Sec}x \leq -1 \text{ o } \text{Sec}x \geq 1$
- * No se define en $(2n+1)\frac{\pi}{2} ; n \in \mathbb{Z}$
- * Es una función creciente y decreciente
- * Es una función par : $\text{Sec}(-x) = \text{Sec}x$
- * Es una función periódica : $T = 2\pi$ (período principal)
- * No es inyectiva.

VI. FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA COSECANTE

$$F.T(Csc) = \{ (x; y) / y = Cscx ; x \in D(Csc) \}$$



Curva a la que se denomina **cosecantoide**, de la cual afirmaremos :

- * $D(Csc) = \mathbb{R} - \{n\pi ; n \in \mathbb{Z}\}$
- * $R(Csc) = \langle -\infty ; -1 \rangle \cup [1 ; +\infty) \Rightarrow Cscx \leq -1 \text{ o } Cscx \geq 1$
- * No se define en $n\pi ; n \in \mathbb{Z}$
- * Es una función creciente y decreciente
- * Es una función par : $Csc(-x) = -Cscx$
- * Es una función periódica : $T = 2\pi$ (periodo principal)
- * No es inyectiva.

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Halle la suma del máximo y mínimo valor de la función:
 $f(x) = 3 + \text{Sen}x$

a) 5 b) 6 c) 7
 d) 8 e) 9

02. Indique el mínimo valor que asume la función:
 $g(x) = 4 - \text{Cos}^2x$

a) 1 b) 3 c) 5
 d) 6 e) 7

03. Determine el dominio de la función: $f(x) = \frac{4}{\text{Sen}x} + 2$

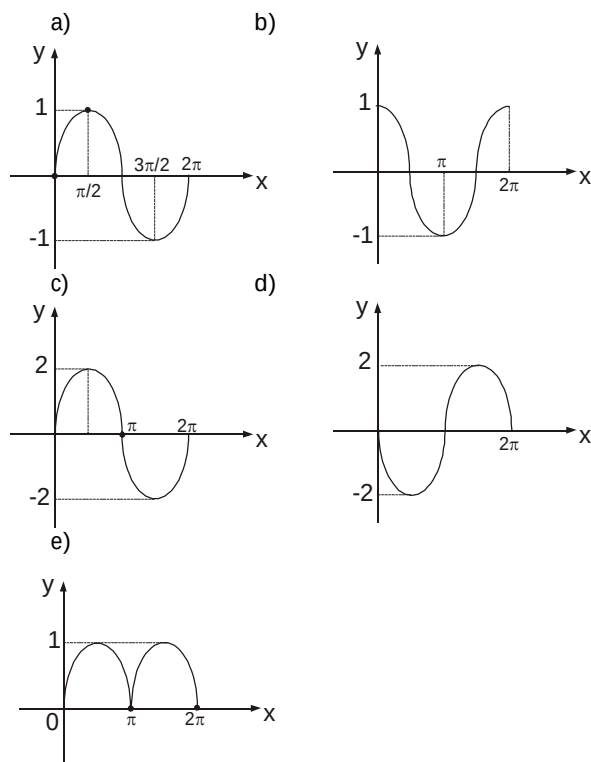
a) $\mathbb{R} - \{\frac{n\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\}$ b) $\mathbb{R}$
 c) $\mathbb{R} - \{0\}$ d) $\mathbb{R} - \{n\pi / n \in \mathbb{Z}\}$
 e) $\mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{3} / n \in \mathbb{Z}\}$

04. Determine el dominio de la función: $H(x) = 4\text{Cos}(\frac{1}{x})$

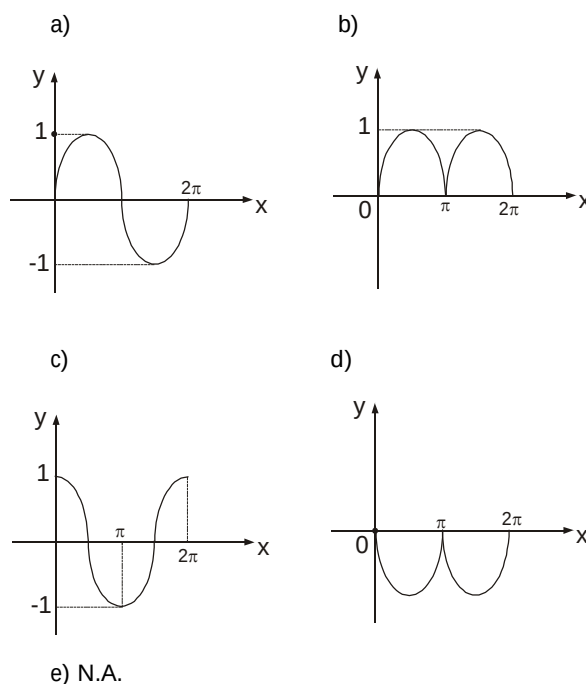
a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R} - \{0\}$ c) $\mathbb{R} - \{1\}$
 d) $\mathbb{R} - \{n\pi / n \in \mathbb{Z}\}$ e) $\mathbb{R} - \{2\}$

05. Graficar la función:

$$y = F(x) = 2\text{Sen}x; \quad x \in [0; 2\pi]$$



06. Graficar: $y = f(x) = |\text{Sen}x|; \quad x \in [0; 2\pi]$



07. Dadas las funciones f y g definidas por: $f(x) = 2\text{Cos}x$ y $g(x) = 1 + \text{Cos}x$.

Hallar un intervalo donde $f(x) < g(x)$

a) $<0; \frac{\pi}{2}>$ b) $<0; \pi>$ c) $<\pi; 2\pi>$
 d) $<\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}>$ e) $<0; 2\pi>$

08. Determine el rango de la función: $H(x) = 3 + 3\text{Cos}^2x$

a) $[2, 5]$ b) $[2, 4]$ c) $[3, 6]$
 d) $\mathbb{R}$ e) $[0, 3]$

09. Determine el rango de la función: $F(x) = 4 - 2\text{Sen}^2x$

a) $[1, 2]$ b) $[2, 4]$ c) $[3, 7]$
 d) $[-1, 1]$ e) $\mathbb{R}$

10. Determine el rango de: $g(x) = 8\text{Sen}^2x - 1$

a) $[-2, 5]$ b) $[-1, 7]$ c) $[2, 4]$
 d) $[-3, 3]$ e) $\mathbb{R}$

11. Determine el periodo de: $y = f(x) = 4\text{Cos}3x + 7$

a) 2π b) $\frac{2\pi}{3}$ c) 3π
 d) $\frac{3\pi}{2}$ e) π

12. ¿Cuál es el dominio de la función: f definida por:

$$f(x) = 2\text{Sen}(\sqrt{x}) + 1?$$

- a) R b) $R - \{1\}$ c) $[-1; 1]$
d) $R - \{0\}$ e) $[0; +\infty >$

13. ¿Cuál es el dominio de la función g definida por:

$$g(x) = 3\text{Cos}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + 2?$$

- a) R b) $R^+ - \{0\}$ c) $[-1; 1]$
d) $R - \{1\}$ e) $< 0; +\infty >$

14. Determine el rango de la función f definida por:

$$f(x) = -2\text{Cos}^2 x + \text{Cos} x + 1.$$

- a) $[-2; \frac{9}{8}]$ b) $[-2; \frac{7}{16}]$ c) $[-4; \frac{7}{8}]$
d) $[-4; \frac{7}{4}]$ e) $[-\frac{3}{2}; \frac{7}{8}]$

15. Si f es una función definida por:

$$f(x) = \text{Sen}^2 x - 2\text{Sen} x + \frac{5}{2}$$

Determine el valor de: $E = 2f_{\text{máx}} + 4f_{\text{mín}}$

- a) 14 b) 15 c) 16
d) 17 e) 18

16. Graficar: $y = |\text{Sen} 4x|$
Indicar su periodo.

- a) $\frac{\pi}{8}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{2}$
d) π e) 2π

17. Determine la extensión de la función:

$$H(x) = \frac{\text{Cos} x \text{Tan} x + \text{Sen} x}{\text{Tan} x}$$

- a) $[-2; 2]$ b) $[-1; 1]$ c) $[1; 2]$
d) $[-1; 5]$ e) R

18. Si: $F(x) = \frac{|\text{Sen} x| + 1}{\text{Sen}^2 x - 1}$. Determine el rango de F.

- a) $< -\infty; -1]$ b) $< -1; 1 >$ c) $[0; 1 >$
d) $< 1; +\infty >$ e) $R - \{0\}$

19. Si: $g(x) = \sqrt{2 + |\text{Cos} x|}$. Determine el rango de g.

- a) $[0; \sqrt{2}]$ b) $[\sqrt{2}; 2]$ c) $[\sqrt{2}; \sqrt{3}]$
d) $[-1; 1]$ e) $[1; \sqrt{3}]$

20. Hallar el rango de la función f definida por:

$$f(x) = \frac{\text{Sen} x + 2}{\text{Sen} x + 3}; \quad x \in [0; 2\pi]$$

- a) $[0, 1/2]$ b) $[1/2, 3/4]$ c) R
d) $[0, 2]$ e) $[-1, 1]$

21. Señale Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda en:

I. La función: $y = f(x) = \text{Sen} x$, posee un máximo en $\langle 0; \pi \rangle$

II. La función $y = f(x) = \text{Sen} x$, es inyectiva en $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

III. La función: $y = f(x) = \text{Sen} x$, es impar.

- a) VVV b) VVF c) FVV
d) VFV e) VFF

22. Señale Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda en:

I. La función: $y = f(x) = \text{Cos} x$, es inyectiva en $\langle \pi; 2\pi \rangle$

II. La función: $y = f(x) = \text{Cos} x$, es creciente en $\langle 0; \pi \rangle$

III. La función: $y = f(x) = \text{Cos} x$, es par.

- a) VVV b) VFV c) VVF
d) VFF e) FVV

23. Señale Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda en:

I. La función: $y = f(x) = \text{Tan} x$, tiene dominio: $R - \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in Z \right\}$

II. La función: $y = f(x) = \text{Tan} x$, es creciente en $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$

III. La función: $y = f(x) = \text{Tan} x$, es impar.

- a) VVV b) VVF c) FVV
d) VFV e) VFF

24. Se define la función:

$$y = f(x) = \text{Tan} 2x + 1$$

¿Cuál será su dominio?

- a) $R - \left\{ \frac{n\pi}{2}; n \in Z \right\}$
b) $R - \{(2n+1)\pi; n \in Z\}$
c) $R - \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{4}; n \in Z \right\}$
d) $R - \{n\pi; n \in Z\}$

e) $R - \{2n\pi ; n \in \mathbb{Z}\}$

25. Señale el dominio de la función :

$$y = g(x) = \frac{\text{Sen}x + 1}{\text{Cos}x + 1} ; (n \in \mathbb{Z})$$

- a) R b) $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$
 c) $R - \{n\pi\}$ d) $R - \{(2n+1)\pi\}$
 e) $R - \left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$

26. Señale el rango de la función :

$$y = h(x) = 2\text{Sen}^2x + 3\text{Cos}^2x$$

- a) $[0 ; 2]$ b) $[-\sqrt{3} ; \sqrt{13}]$
 c) $[0 ; \sqrt{13}]$ d) $[2 ; 3]$
 e) $[2 ; \sqrt{13}]$

27. Determine el rango de "F".

$$F(x) = 3 + \text{Sen}x\text{Cos}x$$

- a) $[2 ; 4]$ b) $[3 ; 4]$
 c) $\left[\frac{5}{2} ; \frac{7}{2}\right]$ d) $\left[\frac{3}{2} ; \frac{5}{2}\right]$
 e) $[5 ; 7]$

28. Dada la función :

$$h(x) = \text{Cos}^2x - \text{Sen}x$$

Determine su rango

- a) $\left[\frac{3}{2} ; \frac{7}{2}\right]$ b) $[-1 ; 2]$
 c) $\left[2 ; \frac{7}{2}\right]$ d) $\left[\frac{5}{4} ; \frac{7}{2}\right]$
 e) $\left[-1 ; \frac{5}{4}\right]$

29. Se define la función :

$$y = f(x) = 2\text{Csc}3x - 1$$

¿Cuál es su dominio?

- a) $R - \{3n\pi ; n \in \mathbb{Z}\}$
 b) $R - \left\{\frac{n\pi}{3} ; n \in \mathbb{Z}\right\}$
 c) $R - \left\{\frac{n\pi}{6} ; n \in \mathbb{Z}\right\}$
 d) $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{3} ; n \in \mathbb{Z}\right\}$
 e) $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{6} ; n \in \mathbb{Z}\right\}$

30. ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar la función :
 $f(x) = \text{Sen}(x - 90^\circ)$ en el intervalo $[0 ; 72^\circ]$?

- a) $\text{Sen}(-20^\circ)$ b) -1
 c) $-\frac{1}{2}$ d) $-0,55$
 e) $-\text{Sen}18^\circ$

31. Si consideramos M el valor máximo que asume la función :

$$f(x) = (3 - \text{Sen}x)(3 + \text{Sen}x)$$

y N el valor mínimo que asume la función:

$$g(x) = \left(\text{Cos}x - \frac{1}{3}\right)\left(\text{Cos}x + \frac{1}{3}\right)$$

Luego : M . N resulta :

- a) 8 b) -8 c) 1
 d) -1 e) 0

32. Para qué valores de x, $0 < x < 2\pi$ se cumple $\text{Sen}x > \text{Cos}x$

- a) $0 < x < \frac{\pi}{4}$ b) $0 < x < \frac{3\pi}{4}$
 c) $0 < x < \frac{5\pi}{4}$ d) $0 < x < \frac{7\pi}{4}$
 e) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$

33. Si f es la función definida por :

$$f(x) = \frac{2\text{Sen}x\text{Cos}x - 1}{1 - \text{Sen}x\text{Cos}x}$$

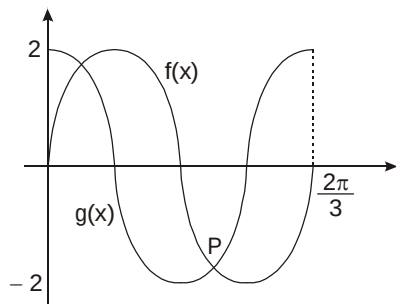
$x \in \left(-\frac{\pi}{2} ; 0\right)$ entonces el rango de f es :

- a) $\left(-\infty ; -\frac{4}{3}\right)$ b) $\left(-\frac{5}{3} ; -1\right)$
 c) $\left(-\frac{4}{3} ; +\infty\right)$ d) $\left(-1 ; \frac{4}{3}\right)$
 e) $\left[-\frac{4}{3} ; -1\right)$

34. ¿Cuál o cuáles de las funciones dadas son inyectivas?

- I. $f(x) = \text{Sen}x$ $0 < x < \pi$
 II. $g(x) = \text{Cos}x$ $0 < x < \pi$
 III. $h(x) = \text{Cot}x$ $0 < x < \pi$
 a) Sólo I b) Sólo II
 c) Sólo III d) II y III
 e) I y II

35. Si $f(x) = a\text{Sen}(kx)$; $g(x) = a\text{Cos}(kx)$ son funciones cuyas gráficas se muestran en la siguiente figura. Calcular las coordenadas del punto P.



- a) $\left(\frac{\pi}{3}; -\sqrt{2}\right)$ b) $\left(\frac{5\pi}{12}; -\sqrt{2}\right)$
 c) $\left(\frac{\pi}{3}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ d) $\left(\frac{5\pi}{12}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
 e) $\left(\frac{5\pi}{3}; -\sqrt{2}\right)$
36. Determinar el dominio máximo de la función :

$$f(x) = 2 - \sqrt{\text{Sen}^2 x - \text{Sen}^4 x - \frac{1}{4}}$$

- a) $\left\{n\pi + \frac{\pi}{4} ; n \in \mathbb{Z}\right\}$
 b) $\left\{n\pi + \frac{\pi}{2} ; n \in \mathbb{Z}\right\}$
 c) $\left\{n\pi - \frac{\pi}{4} ; n \in \mathbb{Z}\right\}$
 d) $\left\{(2n+1)\frac{\pi}{4} ; n \in \mathbb{Z}\right\}$
 e) $\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} ; n \in \mathbb{Z}\right\}$
37. Dadas las proposiciones :
- I. La función $\text{Sen} x$ es creciente en $\langle 0 ; \pi \rangle$
 - II. La función $\text{Cos} x$ es decreciente en $\langle 0 ; \pi \rangle$
 - III. La función $\text{Tan} x$ es creciente en $\left\langle 0 ; \frac{\pi}{2} \right\rangle$
- ¿Cuáles de ellas son verdaderas?
- a) Sólo I b) Sólo II
 c) Sólo III d) I y II
 e) II y III

38. El valor máximo que toma la función :
- $$f(x) = 3\text{Sen}^2 x + 4\text{Cos}^2 x, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ es :}$$

- a) 3 b) 4 c) 5
 d) 6 e) 7

39. El mayor valor que toma la función :
 $f(x) = \text{Cos} 2x + 3\text{Sen} 2x + 2$ es :

- a) $2 + \sqrt{10}$ b) 6
 c) $3 + \sqrt{10}$ d) $1 + \sqrt{10}$
 e) 5

40. Hallar el mínimo valor de :

$$M = 10 - 9\text{Cos}^2 x + \text{Sen} x$$

- a) $\frac{17}{18}$ b) $\frac{35}{36}$ c) $\frac{27}{28}$
 d) $\frac{45}{46}$ e) $\frac{23}{24}$

41. Hallar el rango de $f(x) = |\text{Cot} x| \text{Sen} x$

- a) $\langle -1 ; 1 \rangle$ b) $[-1 ; 1]$
 c) $\langle -1 ; 1 \rangle$ d) $[-1 ; 1 \rangle$
 e) $\mathbb{R} - \langle -1 ; 1 \rangle$

42. Si m y M son los valores mínimo y máximo respectivamente, de la función :

$$f(x) = \text{Sen}^6 x + \text{Cos}^6 x$$

Entonces m + M es :

- a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{3}{2}$
 d) 2 e) $\frac{5}{4}$

43. Si P = (x ; 1-a) es un punto que pertenece a la gráfica de la función Seno, hallar :

$$A = \text{Sen} x (1 - \text{Sen} x) (\text{Csc} x)$$

- a) 1 - a b) $\frac{a}{2}$ c) $\frac{1}{a}$
 d) a e) a - 1

44. El mínimo valor de la función :

$$f(x) = \text{Tan}^2 x ; \quad x \in \left[\frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{6}\right]$$

- a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) 3
 d) No existe el mínimo valor de f
 e) 1

45. Dadas las funciones :

$$y = f(x) = \text{Sen}2x |\text{Sen}x| + \text{Cos}2x |\text{Cos}x|$$

$$y = g(x) = \text{Sen}x$$

Se afirma :

I. En $\left\langle 0 ; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, sus gráficas se intersectan en 1 punto.

II. En $\left\langle \pi ; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$, sus gráficas se intersectan en 1 punto.

III. En $\left\langle \frac{3\pi}{2} ; 2\pi \right\rangle$, sus gráficas se intersectan en 2 puntos.

IV. El periodo principal de "f" es π .

¿Cuántas son verdaderas?

- a) 1 b) 2 c) 3
d) Todas e) Ninguna

46. Dada la función :

$$h(x) = \sqrt{\text{Sen}x} + \sqrt{\text{Cos}x} ; n \in \mathbb{Z}$$

Señale el dominio.

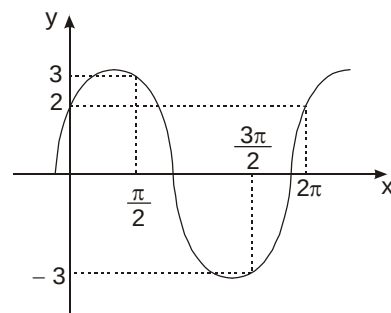
- a) $[2n\pi ; (2n+1)\pi]$
b) $\left[(4n+1)\frac{\pi}{2} ; (2n+1)\pi \right]$
c) $\left[(4n+3)\frac{\pi}{2} ; 2n\pi + 2\pi \right]$
d) $\left[2n\pi ; (4n+1)\frac{\pi}{2} \right]$
e) $\left[(4n+1)\frac{\pi}{2} ; (4n+3)\frac{\pi}{2} \right]$

47. Señalar cuál es la proposición falsa:

FUNCIÓN	DOMINIO	RANGO
a) Senx	R	$[-1 ; 1]$
b) Tanx	$R - \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \right\}$	R
c) Cotx	$R - \{n\pi\}$	R
d) Cosx	R	$[-1 ; 1]$
e) Secx	R	R

($n \in \mathbb{Z}$)

48. En el intervalo $[0 ; 2\pi]$ el siguiente gráfico corresponde a :



- a) $\text{Sen}x + 2\text{Cos}x$
b) $4\text{Cos}x + 3\text{Sen}x$
c) $2(\text{Sen}x + \text{Cos}x)$
d) $3\text{Sen}x + 2\text{Cos}x$
e) $3(\text{Sen}x + \text{Cos}x)$

49. La diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de la función :

$$f(x) = |\text{Sen}x| + |\text{Cos}x|$$

Es aproximadamente igual a :

- a) 0,41 b) 0,42 c) 0,44
d) 0,46 e) 0,91

50. Hallar el máximo valor de :

$$E = \frac{\text{Sen}x - \text{Cos}x}{\text{Sen}x + \text{Cos}x}$$

$$\text{Para : } x \in \left\langle -\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4} \right\rangle$$

- a) -2 b) -1 c) 0
d) 1 e) 2

51. Si : $f(x) = 1 - \text{Sen}|x|$

Indicar Verdadero (V) o Falso (F) para las siguientes proposiciones:

- I. $f(x)$ es creciente en $\left\langle \frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$
II. $f(x)$ es decreciente en $\left\langle -\frac{3\pi}{2} ; -\frac{\pi}{2} \right\rangle$
III. $f(x)$ tiene como rango $[0 ; 2]$

- a) VFF b) VFV c) VVF
d) VVV e) FVV

52. Si R es el rango de la función f y

$$f(x) = \text{Cos}6x + \text{Cos}4x + \text{Cos}2x - \frac{\text{Sen}7x}{2\text{Sen}x}$$

Entonces, podemos afirmar :

- a) $R \subset \langle 0 ; 1 \rangle$ b) $R \subset \langle -1 ; 0 \rangle$
c) $R \subset \left[0 ; \frac{1}{2} \right]$ d) $\langle -1 ; 1 \rangle \subset R$
e) $\langle 0 ; 1 \rangle \subset R$

53. Hallar el valor de :

$$E = f_{\max} - f_{\min}$$

$$\text{Si : } f(x) = 2\cos x (\cos x - \sin x) - 1$$

$$x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \frac{5\pi}{8} \right]$$

- a) $-2\sqrt{2}$ b) -1 c) 2
d) $2\sqrt{2}$ e) 1

54. Hallar los valores x en el intervalo $\langle 0 ; \pi \rangle$ para los cuales existe f , si :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin x - 2\cos^2 x}}$$

- a) $\left[\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} \right]$ b) $\left[\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} \right]$
c) $\left\langle \frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} \right\rangle$ d) $\left\langle \frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$
e) $\left\langle \frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$

55. Señale : $R_f \cap R_g$, si :

$$f(x) = \sin(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$$

$$g(x) = \cos(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$$

- a) $[\sin 2 ; 1]$ b) $[-1 ; \sin 2]$
c) $[\cos 2 ; 1]$ d) $[-1 ; \cos 2]$
e) $[\cos 2 ; \sin 2]$

56. Determine el rango de la función f definida por:
 $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$.

- a) $[0; \sqrt{2}]$ b) $\left[\frac{1}{2}; \sqrt{2} \right]$ c) $[1; \sqrt{2}]$
d) $[0; 1]$ e) $\left[\frac{1}{2}; 1 \right]$

57. Dada la función f definida por:

$$f(x) = \sin 2x + |\sin x + \cos x|$$

Hallar: $f_{\max} + f_{\min}$

- a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
d) 3 e) $2(1 + \sqrt{2})$

58. Determinar el periodo de:

$$f(x) = \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{3} + \sin \frac{x}{4}$$

- a) 12π b) 18π c) 24π
d) 48π e) 52π

59. Si f es una función definida por:

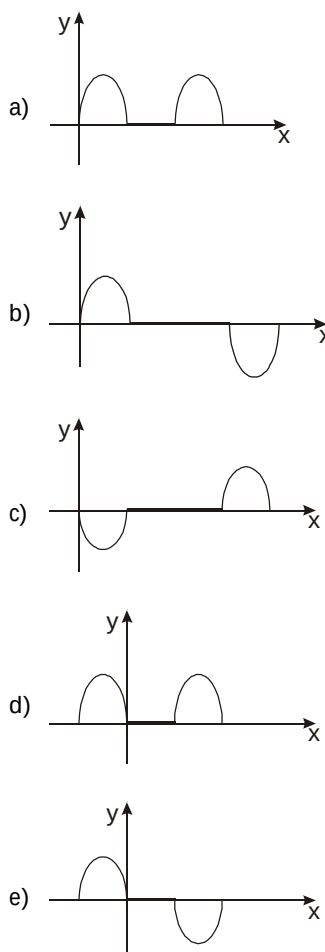
$f(x) = \sin x + \cos x + \tan x + \cot x$; halle el dominio de dicha función, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

- a) $\mathbb{R}$ b) $[-1; 1]$ c) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\}$
d) $\mathbb{R} - \{2k / k \in \mathbb{Z}\}$ e) $[0; 1]$

60. Dada la función :

$$g(x) = \sin x (\cos x + |\cos x|)$$

Señale su gráfico.



Claves

01.	<i>b</i>
02.	<i>c</i>
03.	<i>d</i>
04.	<i>b</i>
05.	<i>c</i>
06.	<i>b</i>
07.	<i>d</i>
08.	<i>c</i>
09.	<i>b</i>
10.	<i>b</i>
11.	<i>b</i>
12.	<i>e</i>
13.	<i>e</i>
14.	<i>a</i>
15.	<i>d</i>
16.	<i>b</i>
17.	<i>a</i>
18.	<i>a</i>
19.	<i>c</i>
20.	<i>b</i>
21.	<i>a</i>
22.	<i>b</i>
23.	<i>a</i>
24.	<i>c</i>
25.	<i>d</i>
26.	<i>d</i>
27.	<i>c</i>
28.	<i>e</i>
29.	<i>b</i>
30.	<i>e</i>

31.	<i>d</i>
32.	<i>e</i>
33.	<i>e</i>
34.	<i>d</i>
35.	<i>b</i>
36.	<i>d</i>
37.	<i>e</i>
38.	<i>b</i>
39.	<i>a</i>
40.	<i>b</i>
41.	<i>a</i>
42.	<i>e</i>
43.	<i>d</i>
44.	<i>b</i>
45.	<i>c</i>
46.	<i>d</i>
47.	<i>e</i>
48.	<i>d</i>
49.	<i>a</i>
50.	<i>c</i>
51.	<i>d</i>
52.	<i>b</i>
53.	<i>e</i>
54.	<i>d</i>
55.	<i>c</i>
56.	<i>c</i>
57.	<i>b</i>
58.	<i>c</i>
59.	<i>c</i>
60.	<i>b</i>